世代重複モデルによる
わが国公的年金制度の持続可能性に関する分析

東京大学　公共政策教育部

公共政策学専攻　法政策コース

学籍番号：51-208004

氏名：須田　康裕

要旨

本稿の目的は、わが国の公的年金制度の持続可能性につき厚生労働省の財政検証レポートにある所得代替率の推移等の観点から分析を行うことである。分析においては世代重複モデルを用い、2020 年に所得代替率、国庫負担率及び資産・労働所得税率に関する政策変更を行った場合の消費税率等の推移を分析し、当該政策のもとでの各世代の個人の厚生比較を行った。本稿の独自性は、一般会計と年金特別会計との間の数値的な結びつきを捉えるために国庫負担率の概念を取り入れたモデルを構築し、個人の生涯効用にも焦点を当てた政策比較を行う点にある。

分析の結果は以下の通りである。第一に、公債の増発を行わない場合、毎年の財政均衡を維持するためには現状（2019 年時点）でも消費税率を 27%程度とする必要があり、2020 年に所得代替率を 0.617 から 0.5 まで減らした場合でも 25～26%ほどの税率とする必要があることが分かった。この点、消費税率を低く抑えることができるよう、他の税率（資産所得税及び労働所得税）の引き上げも併せて検討されるところ、例えば所得代替率 0.5、国庫負担率 0.5 のもとで消費税率を 20%前後とするためには（１）資産所得税率を 35%から 51.3%に引き上げる、（２）労働所得税率を 10%から 14.8%に引き上げる、（３）資産所得税率を 35%から 45%に、労働所得税率を 10%から 12%に引き上げるといった租税政策が求められることが確認できた。また、このように消費税率を一定程度まで引き下げるために必要な他税の増税は、国庫負担率を 0.5 から 0.66 に引き上げた場合にさらに必要となることが分かった。

第二に、上述したような消費税率の引き下げに関する検討とは対照的に、各世代の個人の厚生比較の観点からはむしろ高い消費税率を維持する（資産所得税等の増税により消費税を減税しない）ほうが個人の生涯効用は高くなるとの結果を得ることができた。また、消費税率を 20%前後に抑えつつ年金財政を維持する場合には資産所得税のみ増税を行うほうが個人の生涯効用を高い水準に保つことができることが分かった。

年金財政の在り方を考える上では、上記検討のような個人の厚生も考慮に入れた政策的選択を行うべきであるというのが本稿の結論である。

内容

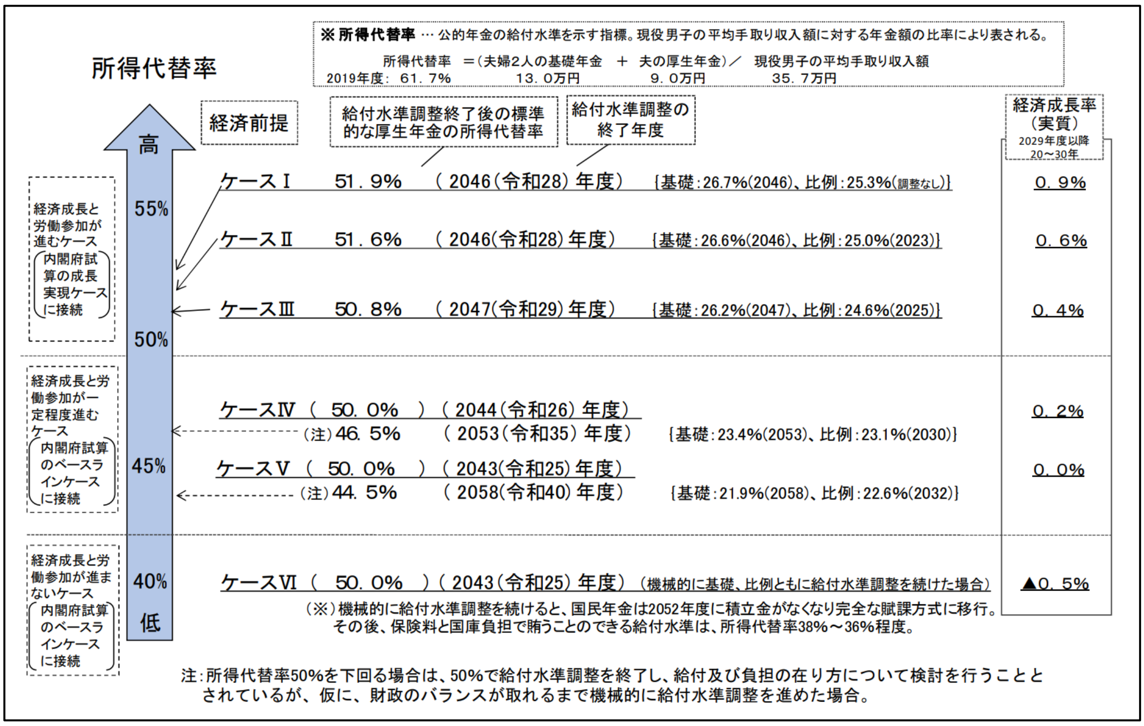
１．はじめに

本稿の目的

わが国の公的年金制度の危機が論じられて久しい。厚生労働省が 2019 年に行った財政検証によれば、同年には 61.7%である公的年金の所得代替率は、2050 年前後には経済成長と労働参加が進むケースでも 50～52%ほどとなり、そうでないケースでは機械的に給付水準の調整を続けた場合 50%を下回るという見通しとなっている（図表１―１及び１－２）[1]。この点、近年の新型コロナウイルスの蔓延による経済・社会情勢の変化を踏まえると、検証時と比べて経済成長等につき悲観的な視点に立った分析が求められるように思われる。

そこで、本稿ではケースⅤに焦点を当て、所得代替率等の政策変更に対応した様々なシミュレーションを行うことにより年金給付額等の諸変数の変化や個人の生涯効用等を分析する。かかる分析をもとに、我々はどのような政策的選択を迫られているのか、各選択はどの程度個人にとって許容されうるものなのか検討を行うこととする。

図表１―１　所得代替率の見通しに関する厚生労働省の試算（１）

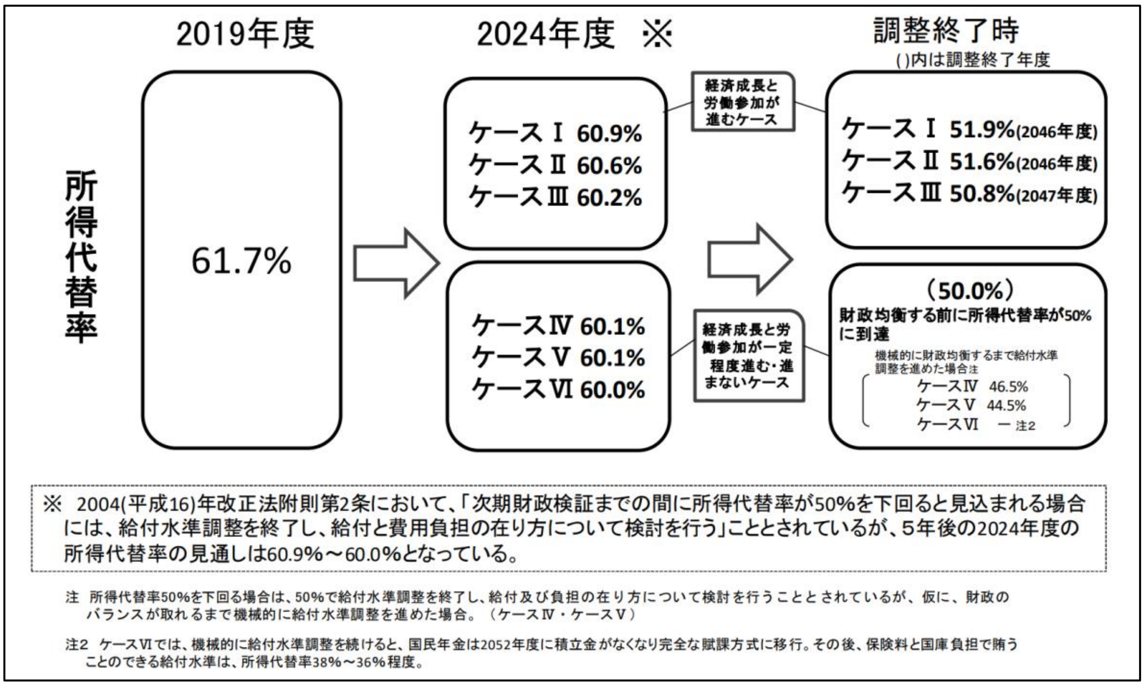


（出典）厚生労働省『2019（令和元）年財政検証結果レポート－「国民年金及び厚生年金に係る財政の現況及び見通し」（詳細版）－』p. 347 より

---

[1] 厚生労働省　2019（令和元）年財政検証結果レポート
<https://www.mhlw.go.jp/stf/seisakunitsuite/bunya/0000093204_00002.html>
検証結果に関しては、主に第３章第７節（pp. 344-445）を参照した。

図表１－２　所得代替率の見通しに関する厚生労働省の試算（２）



（出典）厚生労働省『2019（令和元）年財政検証結果レポート－「国民年金及び厚生年金に係る財政の現況及び見通し」（詳細版）－』p. 349 より

先行研究レビュー

本稿の分析対象に関連する先行研究には様々なものがある。Kitao, Mikoshiba and Takeuchi（2019）は、世代重複（Overlapping Generation Model（OLG））モデルを用いてわが国のマクロ経済予測を行い、所得代替率が 2015 年から逓減し、2045 年には 2015 年比で 20%減となる場合の資本、利子率及び税率等について分析を行っており、いずれも厳しい見通しが示されている（pp. 22-24）。また、わが国財政の持続可能性に関しては山田（2021）の分析が挙げられる。同研究では世代重複モデルをもとに財政健全化のための必要な税率に関するシミュレーション分析が行われており、生産性成長率等が高まった場合（全要素生産性が 1.3%程度）などでも大幅な税率の引上げが必要である旨論じられている。いずれにしても、わが国財政の持続可能性等を捉える上では年齢に関する個人の異質性が取り入れられている世代重複モデルが用いられる場合が多い。そこで、本稿でも先行研究を踏まえ世代重複モデルを用いて公的年金制度の持続可能性に関するシナリオ分析を行うこととする。計算においては MATLAB を用いる。

２．モデル

本節では、本稿のモデルの内容を詳述する。モデルの作成に際しては、Heer & Maussner（2009）の決定的世代重複モデル（Chapter 9: 451-501）を主に参考にした。なお、モデルのうち添え字 t があるものは時間とともに値が内生的に変化する変数であり、そうでないものは計算前に値を予め設定するパラメータである。

２－１．人口構造

本稿のモデルにおける時間は、1 年を最小単位とする離散的（discrete）なものである。かかる概念の下、各 t 期において新たな世代が誕生する。これらの世代は実年齢では 21 歳であり、モデルにおいては $s=1$ と表記し、誕生と同時に経済活動に参入するものとする。各個人は 65 歳（$s=T=45$）まで労働を行い（現役世代）、退職後の 66 歳（$s=T+1=46$）から年金給付を受け（引退世代）、85 歳（$s=T+TR=65$）に死去すると仮定する。したがって、本モデルにおいて個人は実年齢 85 歳よりも前に死去することはなく、個人は自身が 85 歳で亡くなることを踏まえた消費・貯蓄等の行動を行うこととなる。また、本モデルでは総人口を 1 とし、各世代の人口分布はそれぞれ 1/65 であるものとする。換言すれば、世代間で全人口に占める割合が異なることはなく、人口増加率は 0%であるとの仮定を置いている。

本稿では 2019 年（直近の財政検証レポートが発表された年）まで経済が定常状態にあり、翌年 2020 年から所得代替率等に関する政策変更が行われ、一定の期間を経て新たな定常状態へと至るものと仮定する。このような仮定のものでの政策変更以降の諸変数の推移（Transition Path）を分析するわけであるが、この点、新定常状態への収束までに必要な期間（Transition Period, tc）は長くとも一世代の生涯の 3 倍にあたる 195 年間（$tc=3\times(T+TR)=195$）であるとし、したがって MATLAB におけるシミュレーション期間は 2020～2214 年とする。なお、推移については特段の断りがなければ、実際の分析結果に用いるデータは 2020～2100 年までとする。

２－２．家計

t 年に $s=1$ 歳となる代表的家計の生涯効用は以下の式で表される。β は主観的割引率（$\beta>0$ とする）を意味する。

$$\sum_{s=1}^{65}\beta^{s-1}u(c_{t+s-1}^{s},l_{t+s-1}^{s}) \quad \cdots（１）$$

また、即時的な効用 $u(c,l)$ は、消費 c 及び余暇 l の関数である。すなわち、個人は消費及び余暇により効用を得る。なお、労働供給 n は$l_t^s=1-n_t^s$ の関係にあるものとする。η は相対的リスク回避度、γ は消費選好に関するパラメータを意味する。

$$u(c,l)=\frac{\left((c+\psi)l^{\gamma}\right)^{1-\eta}-1}{1-\eta} \quad \cdots（２）$$

現役世代及び引退世代の代表的家計の予算制約式はそれぞれ以下の通りである。k は資本（資産）の保有、w は実質賃金、r は実質利子率、τ_w は労働所得税、τ_p は年金保険料、τ_r は資産所得税、τ_c は消費税、p は年金給付をそれぞれ意味する[2]。この点、左辺は支出、右辺は収入を意味する。なお、個人は資産を保有せずに誕生し、資産を残さずに死去するものとする（したがって、$k_t(1)=k_t(66)=0$ である）。

$$\left(1+\tau_{c,t}\right)c_t^s+k_{t+1}^{s+1}=(1+(1-\tau_r)r_t)k_t^s+\left(1-\tau_w-\tau_{p,t}\right)w_t n_t^s,\ \ s=1,\ldots,45 \quad \cdots（３）$$

$$\left(1+\tau_{c,t}\right)c_t^s+k_{t+1}^{s+1}=(1+(1-\tau_r)r_t)k_t^s+p_t,\ \ s=46,\ldots,65 \quad \cdots（４）$$

２－３．企業

各企業は t 年において、下記の通り規模に対して収穫一定であるコブ・ダグラス型生産関数に従い生産活動を行う。Y は生産量、N は総労働供給、K は総資本、α は資本分配率をそれぞれ意味する。なお、本稿では経済成長率を取り入れていないが（ある種、全要素生産性 $A=1$）、財政検証のケースⅤにおける実質経済成長率は0.0%であり、このような想定とは整合的であるものと考える。

$$Y_t=N_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} \quad \cdots（５）$$

利潤最大化問題により、下記２つの一階の最大化条件が導かれる。δ は、資本減耗率を意味する。

$$w_t=(1-\alpha)K_t^{\alpha}N_t^{-\alpha} \quad \cdots（６）$$

$$r_t=\alpha K_t^{\alpha-1}N_t^{1-\alpha}-\delta \quad \cdots（７）$$

２－４．政府

本稿のモデルでは、政府は一般会計と年金特別会計の２つの異なる会計をそれぞれ管理するものとする。このうち、一般会計は下記式の通りである。φ は年金財政の国庫負担率、G は（年金給付以外の）政府支出をそれぞれ意味する。左辺は各税収により構成される歳入を、右辺は年金財政の国庫負担部分を含めた歳出をそれぞれ表している。消費税率にのみ添え字 t を付していることから、消費税率についてはシミュレーション期間において財政が均衡するように毎年調整されるものとし、労働所得税率及び資本所得税率については（外生的な政策変更を行わない限り）シミュレーション期間において一定とする[3]。なお、ある期

---

[2] なお、個人の労働所得に関しては家計の予算制約式に表記した通り２つの異なる税・保険料が課されることになるが、後述するように労働所得税収入については一般の政府支出及び年金給付にかかる支出の両方に用いられる一方で、年金保険料収入については年金給付にかかる支出のみに用いられる。

[3] なお、本稿では公債発行をモデルに取り入れていないため、2019 年までの定常状態における数値を含め、算出される消費税率が意味するのは、「公債の増発を行わず、毎年の財政（一般会計及び年金特別会計）を均衡させるために

の政府支出は当期の生産量と比例関係にあるものとする（$G_t = \bar{g}Y_t$）。

$$\tau_w w_t N_t + \tau_r r_t K_t + \tau_{c,t} C_t = \varphi \frac{T^R}{T+T^R} p_t + G_t \ \cdots（８）$$

一方で、年金特別会計は下記式の通りである。年金財政のうち、国庫負担部分を除くものは全て本会計で管理され、その支出は全て年金保険料負担により賄われる。この点、当該会計において年金財政が均衡するように、年金保険料率は毎年調整されるものとする。

$$\tau_{p,t} w_t N_t = (1-\varphi) \frac{T^R}{T+T^R} p_t \ \cdots（９）$$

また、所得代替率 ξ については下記等式が成り立つものとする。$\bar{n}$ は平均労働供給を指し、$\bar{n} = \frac{T+T^R}{T} N_t$ である。この点、端的に言えば t 年における引退世代への年金給付額はその年の平均労働供給により得られる「手取り」の金額に ξ をかけたものとなる。

$$\xi = \frac{p_t}{(1-\tau_w-\tau_{p,t}) w_t \bar{n}_t} \ \cdots（10）$$

２－５．均衡

均衡状態においては、各世代の行動（労働供給 n_t^s 及び資本保有 k_t^s）に関する変数を集積したものがマクロ経済の変数（総労働供給 N_t 及び総資本 K_t）との間で一貫性を持つものであるとする。

$$N_t = \sum_{s=1}^{45} \frac{n_t^s}{65} \ \cdots（11）$$

$$K_t = \sum_{s=1}^{65} \frac{k_t^s}{65} \ \cdots（12）$$

また、財市場も以下のように均衡するものとする。

$$N_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} = \sum_{s=1}^{65} \frac{c_t^s}{65} + K_{t+1} - (1-\delta) K_t + G_t \ \cdots（13）$$

必要な消費税率」である。後述する年金保険料率についても同様の指摘ができる。

３．パラメータ

本稿の分析において事前に数値を割り当てるパラメータの詳細は下記図表にまとめた通りである。資本分配率及び資本減耗率に関しては、わが国のデータ（1984 年～1989 年）の標本平均を取ることで算出された Hayashi and Prescott (2002) の数値を用いる。主観的割引率については、一般均衡型世代重複モデルによりわが国年金財政の持続可能性のシミュレーションを行った島澤（2004）の数値（同著内の表記は「時間選好率」）を用いる。消費選好に関するパラメータについては Heer & Maussner (2009) の数値を用いる。相対的リスク回避度及び政府支出対 GDP 比については、Kitao, Mikoshiba and Takeuchi (2019) の数値を用いる。同著では、政府支出対 GDP 比は国・地方自治体の 2015 年のデータにより算出されている。所得代替率については、前掲の財政検証結果レポートの 2019 年の実績値をそのまま用いて 0.617 とする。これは 2019 年（定常状態）における数値であり、2020 年以降はシミュレーション毎に異なる数値を割り当てる。資産所得税及び労働所得税については、Imrohoroglu, Kitao and Yamada (2016) のデータを用いる。なお後者につき、同著では限界税率（marginal tax rate）ではなく平均税率（average tax rate）を用いて計算し、かつ控除及び免税等を考慮しているため、一般的に分析に用いられる税率より低く設定されている旨述べられている。両税についてもシミュレーションの内容によっては 2020 年に税率の変更を行うこととするが、この点については後述する。最後に、年金財政の国庫負担率については、国民年金法 85 条 1 項及び厚生年金保険法 80 条 1 項の規定を参考にし、0.5 とする [4]。本稿のモデルが捉える年金給付に係る歳出は実際の法制度が対象とするものと異なる部分もあるが、ここでは同じ数値を置いている。こちらに関しても、シナリオによっては 2020 年に政策変更を行うものとする。

[4] 国民年金法（昭和三十四年法律第百四十一号）<https://elaws.e-gov.go.jp/document?lawid=334AC0000000141>

第八十五条　国庫は、毎年度、国民年金事業に要する費用（次項に規定する費用を除く。）に充てるため、次に掲げる額を負担する。

一　当該年度における基礎年金（老齢基礎年金、障害基礎年金及び遺族基礎年金をいう。以下同じ。）の給付に要する費用の総額（次号及び第三号に掲げる額を除く。以下「保険料・拠出金算定対象額」という。）から第二十七条第三号、第五号及び第七号に規定する月数を基礎として計算したものを控除して得た額に、一から各政府及び実施機関に係る第九十四条の三第一項に規定する政令で定めるところにより算定した率を合算した率を控除して得た率を乗じて得た額の二分の一に相当する額（以下略）

厚生年金保険法（昭和二十九年法律第百十五号）<https://elaws.e-gov.go.jp/document?lawid=329AC0000000115>

第八十条　国庫は、毎年度、厚生年金保険の実施者たる政府が負担する基礎年金拠出金の額の二分の一に相当する額を負担する。（以下略）

図表３－１　パラメータの数値及び参照元

パラメータの種類	数値	出典
α（資本分配率）	0.362	Hayashi and Prescott (2002)
δ（資本減耗率）	0.089	Hayashi and Prescott (2002)
β（主観的割引率）	0.9985	島澤（2004）
γ（消費選好に関するパラメータ）	2.0	Heer & Maussner (2009)
η（相対的リスク回避度）	2.0	Kitao, Mikoshiba and Takeuchi (2019)
$\bar{g}$（政府支出対 GDP 比）	0.2	Kitao, Mikoshiba and Takeuchi (2019)
ξ（所得代替率）	0.617	厚生労働省の試算をもとに設定
τ_r（資産所得税）	0.35	Imrohoroglu, Kitao and Yamada (2016)
τ_w（労働所得税）	0.1	Imrohoroglu, Kitao and Yamada (2016)
φ（年金財政の国庫負担率）	0.5	国民年金法 85 条、厚生年金保険法 80 条

４．シミュレーション及び分析結果

シミュレーションの概要

先述したように、本稿では2019年までを経済の定常状態（旧定常状態）とし、政府が2020年に所得代替率の改定等の政策変更を行った場合の当年〜2100年までの消費税率等の変化について分析する。政策変更による含意を明確なものとするため、本稿における政策変更は全て2020年のみに行われ、以降、変更後の数値が継続されるものとする。

本稿におけるシミュレーションは図表４－１に記載したとおりである。まず、2020年の政策変更が $\xi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$, $\tau_w = 0.1$ である場合（したがって、資産・労働所得税については変更しない）及び $\xi = 0.445$ $\tau_r = 0.35$, $\tau_w = 0.1$ である場合（こちらも同様）の総資本量、総労働供給量等の内生変数の推移を確認する（シミュレーション（１））。両分析の結果は以降のシミュレーション結果におけるベンチマークとなるものである。なお、財政を均衡させるための税・保険料（内生変数）として消費税及び年金保険料が挙げられるところ、本稿ではとりわけ消費税率に着目し、これを「均衡消費税率」と呼ぶこととする。

次に、両分析により算出された均衡消費税率の推移をもとに、当該税率が新たな定常状態において一定の水準を維持するよう資産・労働所得税率を変更した場合の諸変数の推移を分析し、シミュレーション（１）との比較を行う（シミュレーション（２））。後述するが、所得代替率のみを変更する場合消費税率は 20%を上回ることとなるため、ここでは均衡消費税率が 20%前後に収束するよう資産・労働所得税率の変更を行うこととする。これにより、特定の税率を一定の範囲に収束させるよう政策を調整した場合の経済への影響の分析や収束のための選択肢の検討を行うことができるものと考える。

加えて、国庫負担率を2020年に0.5から0.66（国庫負担割合を1/2から2/3に上昇させることを意図）に変更しつつ、シミュレーション（２）と同様に均衡消費税率 20%を実現させるような資産・労働所得税率の変更を行う場合の諸変数の推移を分析する（シミュレーション（３））。シミュレーション（１）及び（２）とは異なる国庫負担率を採用することにより、年金保険料率等の推移値が変化することが考えられる。

最後に、政策変更ごとに各世代別の生涯効用を測定し、所得代替率及び資産・労働所得税率等の政策変更がどの程度家計にとって許容されうるものなのか検討を行う（シミュレーション（４））。バイセクション法を用いて「ある年に経済活動に参入した個人の生涯効用を消費に置き換えて考えた場合、旧定常状態に活動する個人（2020年以前に死去）が行う消費の何%となるのか」算出することとする。

以上が本稿で行うシミュレーションの概要である。なお、シミュレーションに用いた計算手法等についてはAPPENDIXに記載している。

図表４－１　シミュレーション一覧

シミュレーション１：所得代替率についてのみ政策変更を行う（ケースⅤを想定）

１－１　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$

１－２　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$

（なお、$\varphi = 0.66$ の場合についても確認）

シミュレーション２：消費税率が一定値（20%）に収束するような政策変更を行う[5]

（ベンチマーク：2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）

２－１－１　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.513$，$\tau_w = 0.1$

２－１－２　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.148$

２－１－３　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.45$，$\tau_w = 0.12$

（ベンチマーク：2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）

２－２－１　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.501$，$\tau_w = 0.1$

２－２－２　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.143$

２－２－３　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.449$，$\tau_w = 0.116$

シミュレーション３：国庫負担率も変更した上で同趣旨の政策変更を行う

（ベンチマーク：2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）

３－１－１　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.595$，$\tau_w = 0.1$

３－１－２　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.175$

３－１－３　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.5$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.487$，$\tau_w = 0.137$

（ベンチマーク：2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）

３－２－１　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.578$，$\tau_w = 0.1$

３－２－２　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.66$ $\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.168$

３－２－３　2020 以降のパラメータ：$\xi = 0.445$ $\varphi = 0.5$ $\tau_r = 0.481$，$\tau_w = 0.132$

シミュレーション４：検討した政策毎の各世代別の生涯効用の測定を行う（詳細は後述）

---

[5] シミュレーションⅡ及びⅢにおける資産・労働所得税税率の算出について

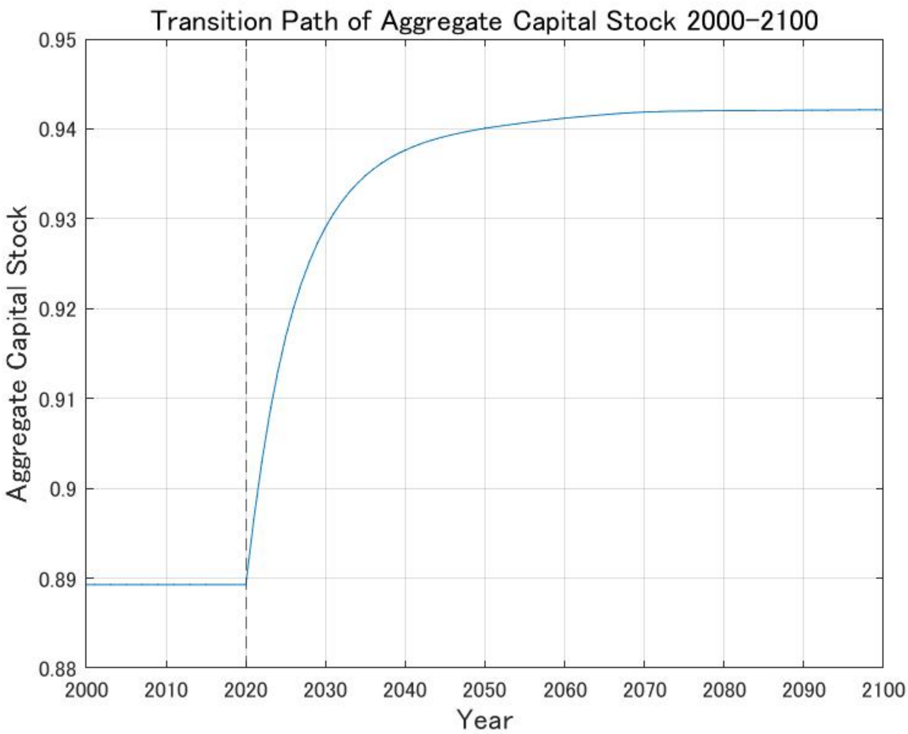
両税率の値は定常状態における数値を求めるコード（"compute_steady_RP.m"）を用いて算出した。本コードは"trasnition_RP.m"のコードに含まれる関数であるが、例えば本コード内でパラメータ（初期設定では%を付している）を設定し（%を取り除く）、該当箇所をコマンドウィンドウに張り付けて読み込むことで、推移の計算を行うことなく新定常状態における消費税率を算出できる（1 回あたり 20~30 秒程度）。

シミュレーションは資産所得税のみを変更するもの、労働所得税のみを変更するもの、及び両税とも変更するものの３つに分類できる。このうち、前二者については均衡消費税率の値が最も 20%に近づく資産（労働）所得税率を算出した（小数点第３位まで検討）。両税ともに変更を行う場合、その組み合わせは無数に存在するところ、本稿では両税につきベンチマーク以上、かつ一方の税率のみを変更した場合の値以下となる１つの例を採用することとした。例えば、シミュレーション２－１－１では資産所得税率が 0.513、２－１－２では労働所得税率が 0.148 となるところ、２－１－３における資産所得税率は $0.35 < \tau_r < 0.513$ 、労働所得税率は $0.1 < \tau_w < 0.148$ をそれぞれ満たすものである。こちらについても、前二者と同様に検討可能な範囲で均衡消費税率の値が最も 20%に近づく値を算出した。

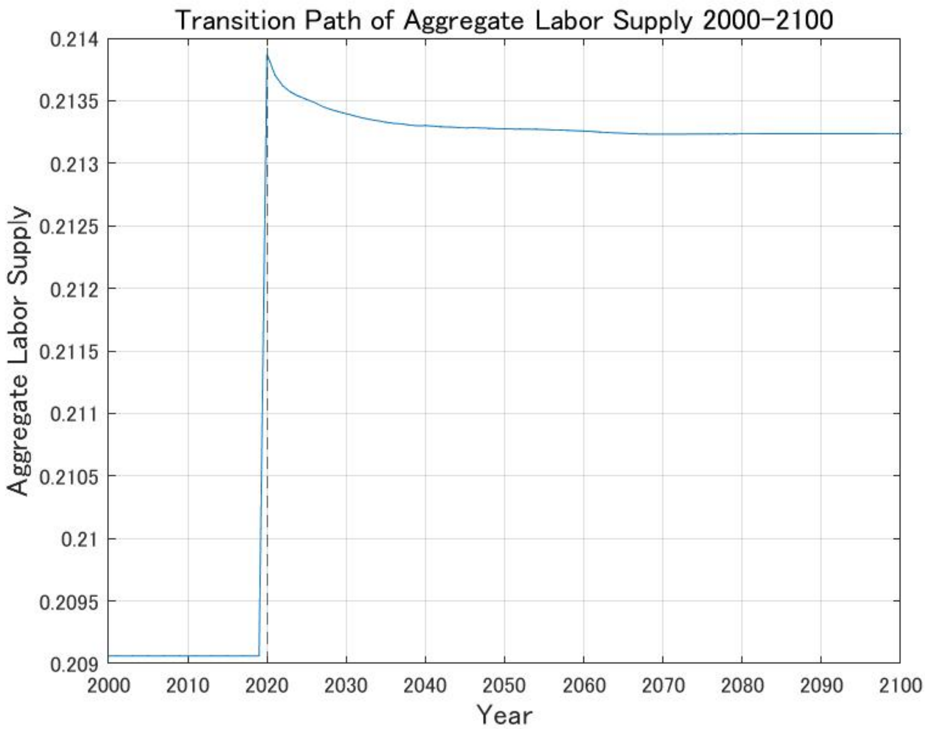
分析結果（シミュレーション１）

まず、１－１（$\xi = 0.5$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）の事例につき分析結果を確認する。図表４－２及び４－３は、2020 年に所得代替率を 0.617 から 0.5 に変更するという政策を実施した場合の総資本及び総労働供給の推移をそれぞれプロットしたものである。いずれの変数についても、所得代替率が低下することで増加することが確認できるが、総資本については政策変更からほぼ一貫して増加し、時間の経過とともに一年あたりの増加率が逓減するという経路となるのに対して、総労働供給の場合には政策変更の当年に供給量がピークとなり、その後低減し、旧定常状態よりも高い水準で収束するという経路となる。総労働供給に関しこのようなオーバーシュートが見られる要因として、政策変更時点で退職年齢（実年齢で 66 歳から労働供給を行わない）に近い世代は、残り少ない現役世代の時間を用いて老後の資金の確保のため労働供給量を増やすという行動をとるため、一時的に総労働供給が大幅に増加するものの、その後、若年期から変更後の所得代替率を与件とした諸変数の影響を受ける個人が増えるため、新たな定常状態付近へと収束するためであると思われる。

図表４－２　総資本の推移（１－１：$\xi = 0.5$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）



図表４－３　総労働供給の推移（１－１：$\xi = 0.5$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）

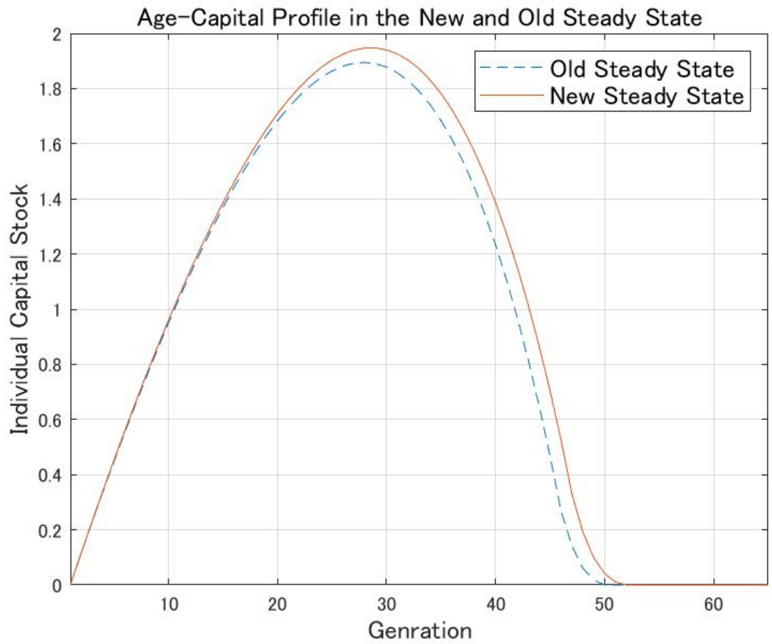


図表４－４及び４－５は、2019 年までの経済の定常状態及び政策変更後の新たな定常状態における個人の生涯にわたる保有資本と労働供給をプロットしたものである。なお、MATLAB の計算上、新定常状態は遅くとも 2215 年に至るものと仮定しており、したがって図表中にある新定常状態の値は当年以降に経済活動に参入した世代の生涯保有資本（労働供給）を示している。しかしながら、例えば 2215 年に経済活動に参入する世代と前掲の推移期間の分析の範囲である 2036 年から経済活動に参入し、2100 年に死去する世代のそれぞれの生涯資本保有（労働供給）の推移は大きく変わらない点は指摘しておきたい。

資本保有に関して特に注目すべきは、50 歳前後（引退世代となってから 5 年ほど経過した年齢）の時点で個人は貯蓄を使い果たし、年金給付によって消費等を行うようになるとの結果である。これは現実とはかけ離れた（少なくとも、老齢期において代表的個人が年金給付のみに頼って生活するとは考えにくい）結果であるように思えるが、その要因として考えられるのは本稿では生存確率の概念や遺贈をモデルに取り入れていない点等である。一方で、分析結果からは所得代替率の低下は現役世代の後半から引退世代にかけての個人の貯蓄を促進させる効果があることが示唆される。労働供給に関して言えば、新定常状態においては旧定常状態に比べて現役世代の後半における労働供給量が増えている点が特徴的である。

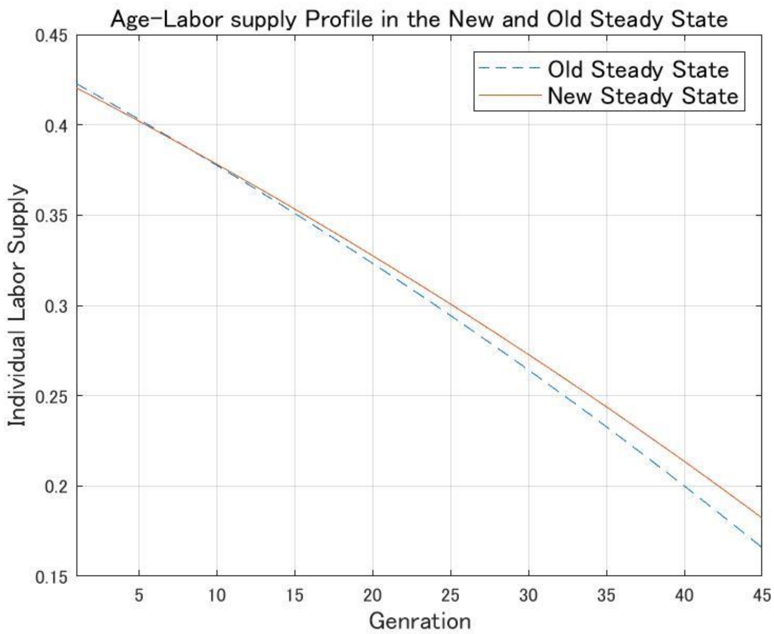
図表４－４　定常状態における年齢別保有資本の比較

（１－１：$\xi = 0.5$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）



図表４－５　定常状態における年齢別労働供給の比較

（１－１：$\xi = 0.5$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）



図表４－６は実質賃金、実質利子率、年金給付、年金保険料及び消費税の 2000～2100 年までの数値をプロットしたものである。賃金及び利子率に関して言えば、前者については短期的には下降しその後上昇、後者については短期的には上昇しその後下降という推移を辿るという結果を得ることができた。年金給付に関して言えば、旧定常状態である 2019 年においては 0.1589、2100 年においては 0.1363 となり、約 14%下落するとの結果が得られた。

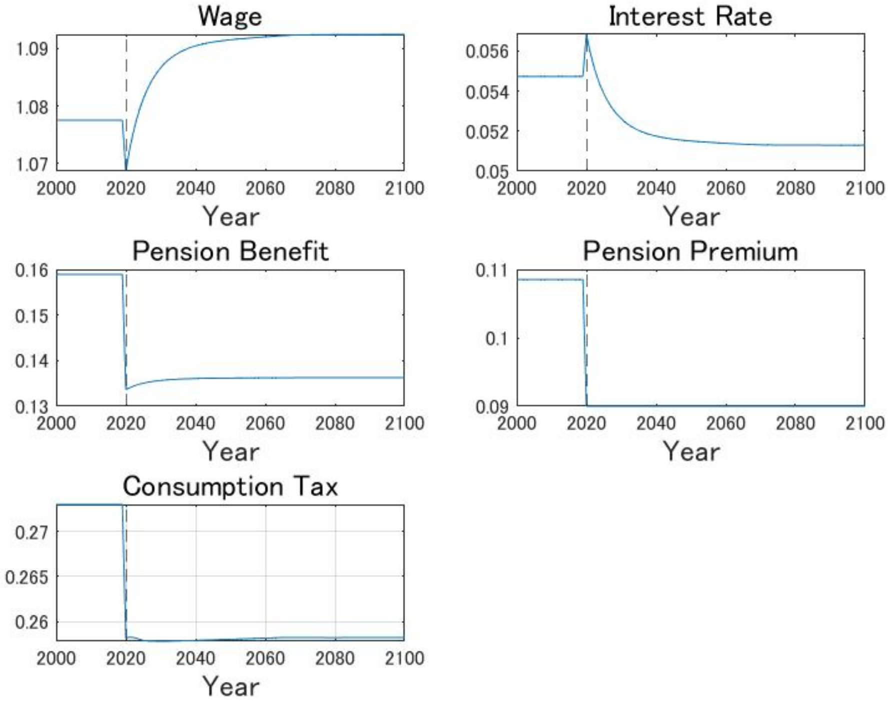
本稿では財政均衡の達成のための内生変数として年金保険料率及び消費税率の推移を確認するところ、MATLAB の計算によれば 2019 年にそれぞれ 10.85%、27.3%となった。前述した通り本稿では公債発行をモデルに取り入れていないため、ここで得られる示唆は、「公債の増発を行うことなしに現状において財政均衡を行う場合に必要となる年金保険料率及び消費税率」であるといえよう。無論、このような解釈は現状の公債を全て税収により償還する場合に必要な税率をも捉えたものではないため、実際にはさらに高い税率が設定されることとなるだろう。そして、2020 年に所得代替率を 0.5 とする政策変更を行う場合、年金保険料率については同年から一貫して 9%となり[6]、消費税率については同年以降 25.8%ほどとなる。このように、所得代替率が下がることで、年金給付額が減少し、年金特別会計を均衡させるための年金保険料率及び一般会計（年金の国庫負担部分を含む）を均衡させるための消費税率がそれぞれ減少するとの結果を得ることができた。しかしながら、それでも均衡消費税率は 20%代半ばと高水準であり、この点当該税率が一定の範囲（20%程度）に収束するような資産・労働所得税率の変更が検討されるところである（シミュレーション２及び３の議論）。

---

[6] 数値が政策変更後一定であるのは、年金保険料率を算出する際に左辺を保険料率、右辺を全て事前に数値を割り当てたパラメータとする等式を用いるためである。詳細は APPENDIX に記載している。

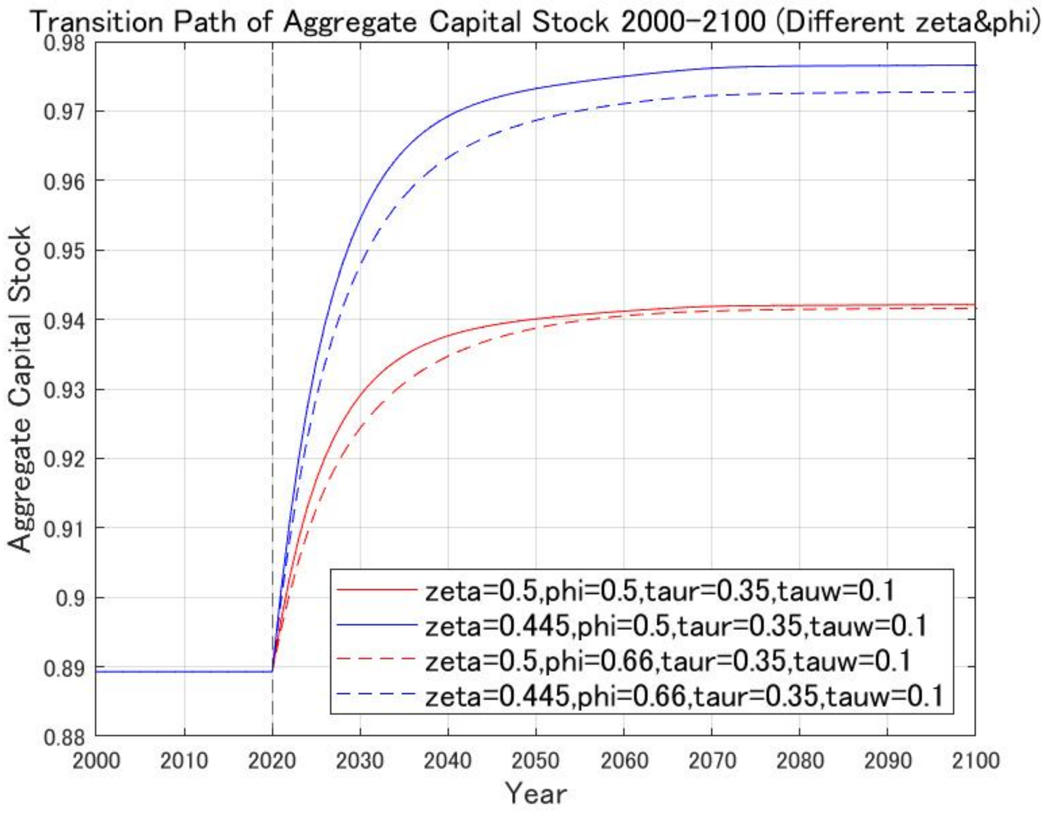
$$\tau_{p,ss} = \frac{(1-\varphi)T^R\xi(1-\tau_w)}{T+(1-\varphi)T^R\xi}$$

図表４－６　要素価格等の推移（１－１：$\xi = 0.5$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$）

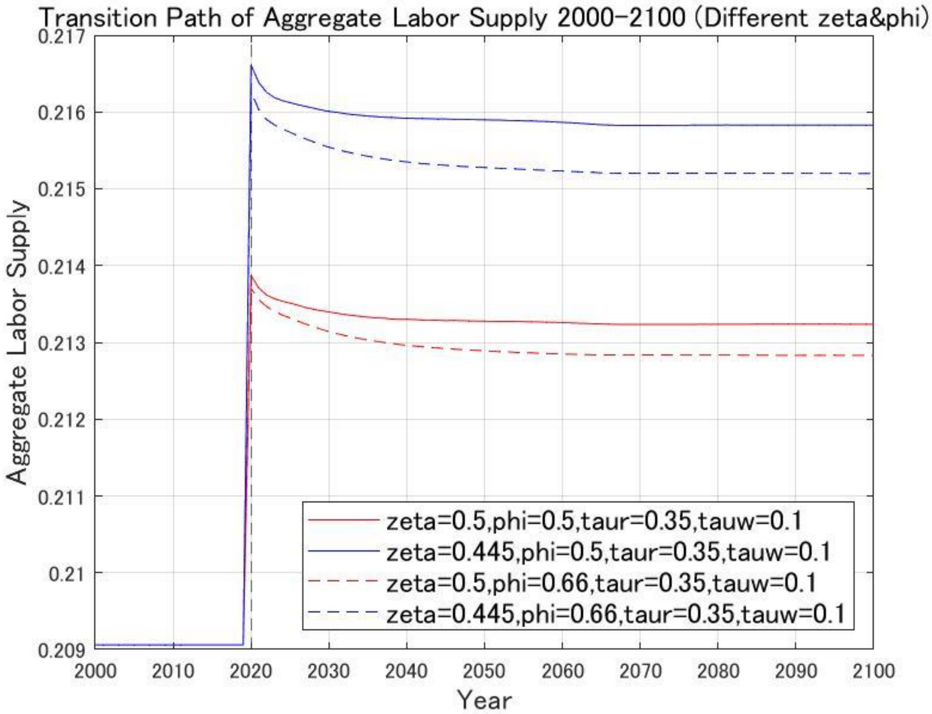


シミュレーション（1）ではケースVにおいて所得代替率を機械的に引き下げた場合（1－2： $\xi = 0.445$，$\varphi = 0.5$，$\tau_r = 0.35$，$\tau_w = 0.1$)）についても分析を行った他、１－１及び１－２の事例につき国庫負担率 φ が 0.5 ではなく（シミュレーション（3）で採用する）0.66 である場合についても併せて計算を行った。以下がその結果である。基本的な含意（諸変数の変化の方向性）は１－１と同様であるが、総資本及び総労働供給については１－２のほうが１－１よりも高い値で推移しており、いずれの事例でも国庫負担率を引き上げた場合において上昇が緩やかであることが確認できる。また、均衡消費税率に関して言えば $\xi = 0.445$ においては $\xi = 0.5$ の場合に比べて要求される税率が低くなるものの依然として 25%程度となる他、いずれの所得代替率のもとでも国庫負担率を 0.66 に変更した場合においては政策変更後に均衡消費税率が上昇し、所得代替率の引き下げによる減税効果を打ち消してしまうことが分かった。

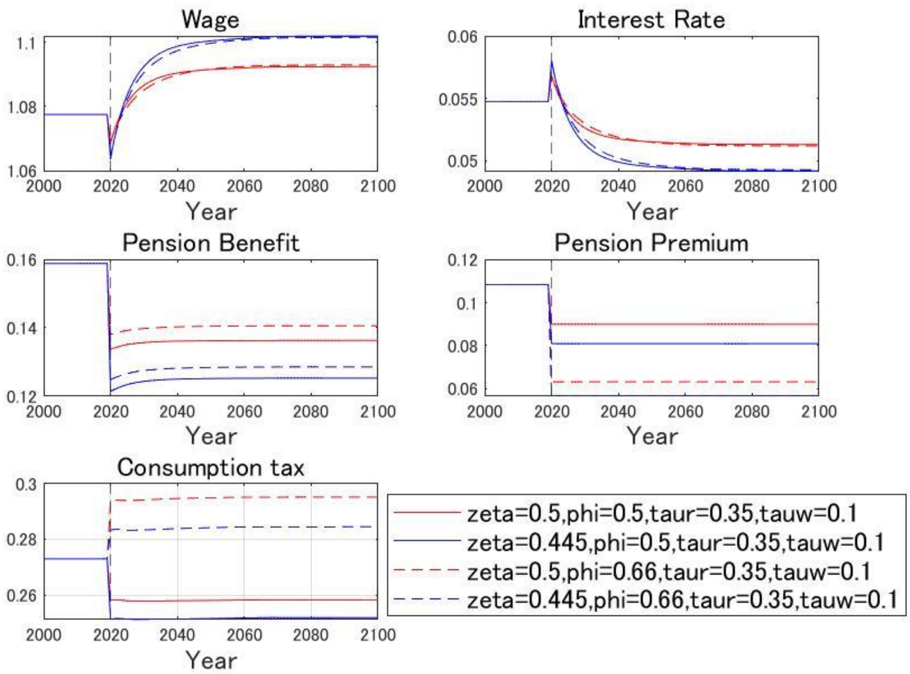
図表４－７　総資本の推移（シミュレーション１内の比較）



図表４－８　総労働供給の推移（シミュレーション１内の比較）



図表４－９　要素価格等の推移（シミュレーション１内の比較）



分析結果（シミュレーション２）

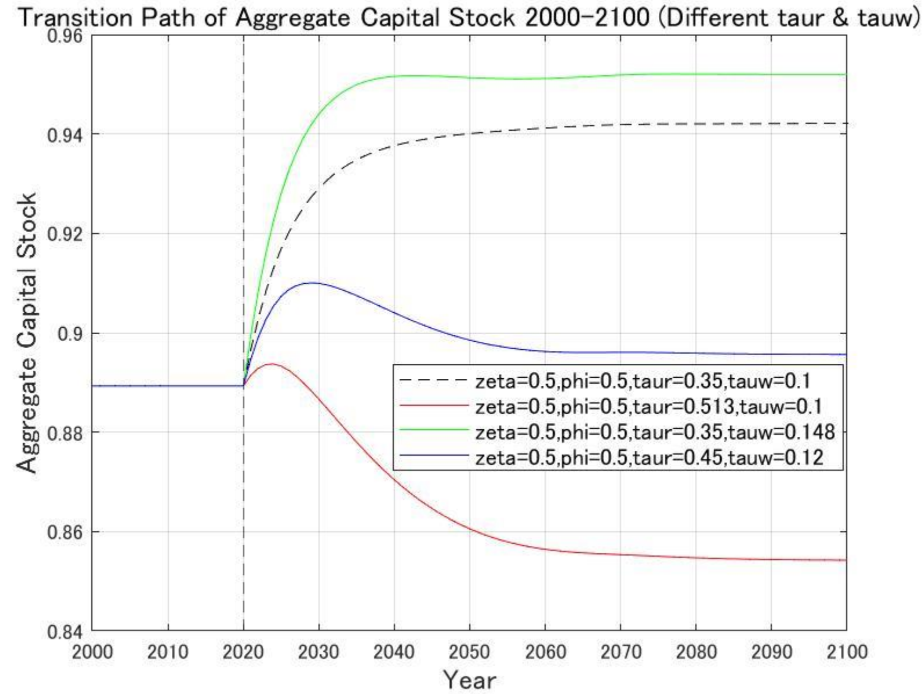
シミュレーション１において均衡消費税率が 20%代半ばとなったことを踏まえ、シミュレーション２では当該税率が 20%前後となるよう資産・労働所得税率を調整した。調整の結果、資産所得税の増税のみにより消費税で負担すべき税収部分を一部賄う場合、必要な資産所得税率は政策変更後の所得代替率が 0.5 及び 0.445 のいずれの場合でも 50%程度となった。同様の観点から労働所得税の増税を検討した場合、必要な労働所得税率は 14～15%程度となった。

図表４－１０～１５は各分析の結果をまとめたものである。政策変更後の総資本に関して言えば、いずれの所得代替率の変更においても労働所得税のみ増税、ベンチマーク（増税なし、消費税率≠20%）、両税とも増税、資産所得税のみ増税の順に高くなることが分かった。図表４－１０及び４－１３にあるように、資産所得税の増税は政策変更直後には一時的な総資本の上昇をもたらすこととなるが、その後総資本は減少し一定の水準に落ち着くこととなる。これは端的には資産所得税の増税により家計にとって貯蓄行動から得られる利子が目減りすることによるものであると思われる。

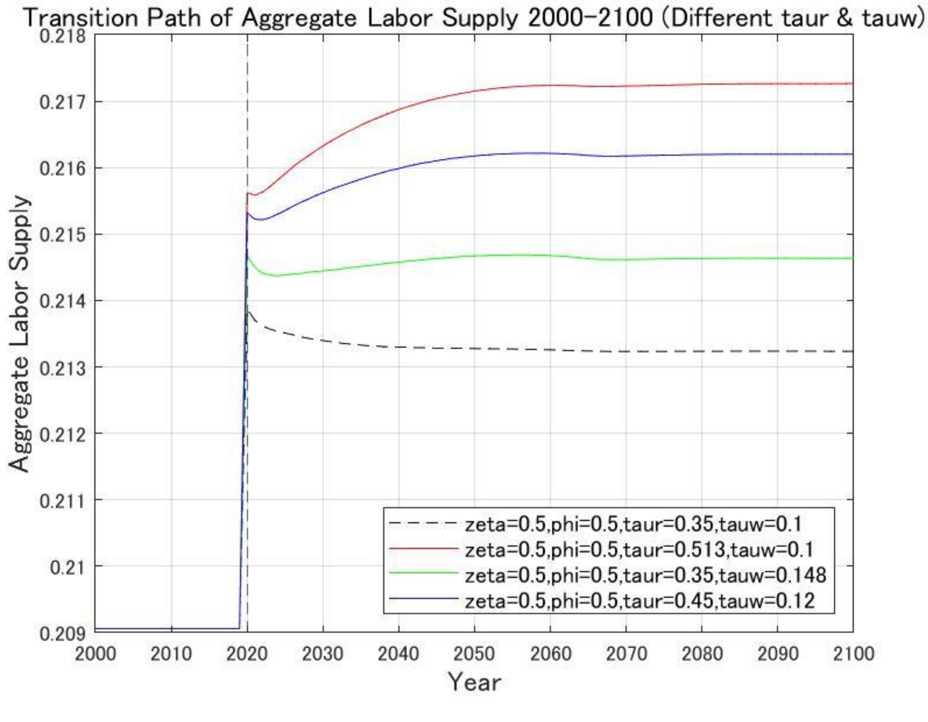
一方で、総労働供給に関して言えば、いずれの所得代替率の変更においても資産所得税のみ増税、両税とも増税、労働所得税のみ増税、ベンチマークの順に高くなることが分かった。この点、資産・労働所得税の増税を行う場合、シミュレーション１で確認したようなオーバーシュートを明確に確認することはできない。図表４－１１及び４－１４にあるように、総労働供給量は 2020 年の政策変更において急上昇した後数年間は微減するのであるが、その後特に資産所得税を増税する場合において再び上昇し、高水準に落ち着くこととなる。このことは、図表４－１２及び４―１５にあるように実質賃金の推移（減少）とも相互に関係しているように思われる。また、労働所得税のみを増税した場合には実質賃金はベンチマークと同水準となるが、これは家計の予算制約式のうち労働供給に関わる $\left(1-\tau_w-\tau_{p,t}\right)w_t n_t^s$ につき、τ_w の上昇によりもたらされる効果が w_t の上昇によりもたらされる効果を減殺するためであると思われる。

また、消費税率の推移についてはシミュレーションの前提から最終的には 20%程度に収束することとなるが、資産所得税のみを増税した場合最も現状からの推移が緩やかなものとなることが分かった。

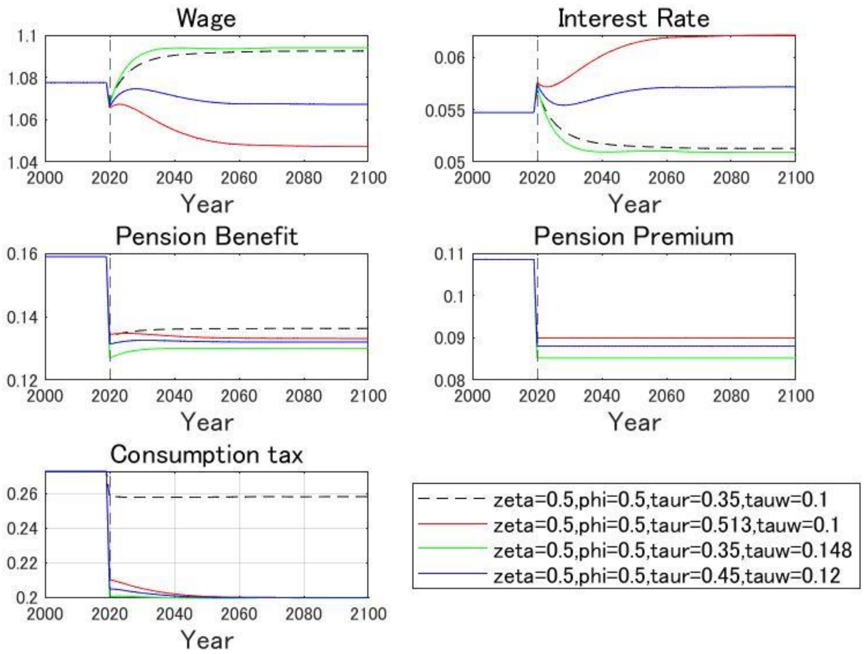
図表４－１０　総資本の推移（２－１－１～３の比較）



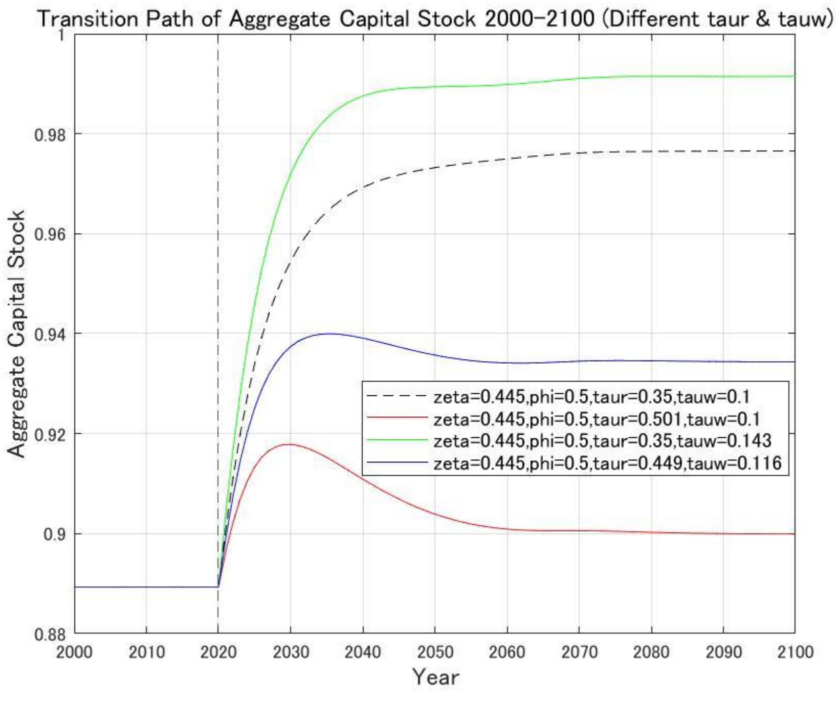
図表４－１１　総労働供給の推移（２－１－１～３の比較）



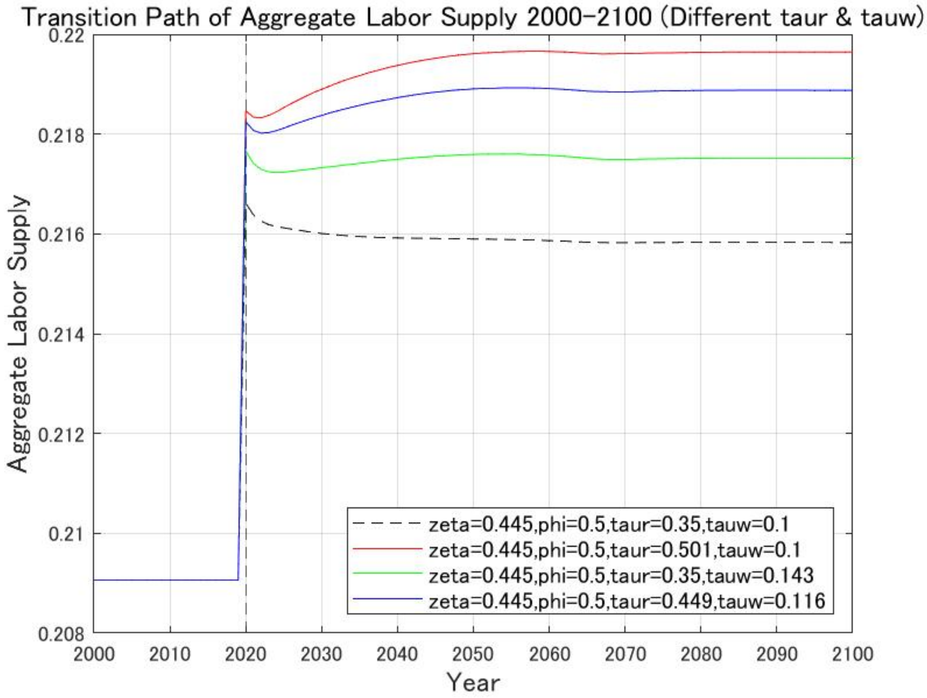
図表４－１２　要素価格等の推移（２－１－１～３の比較）



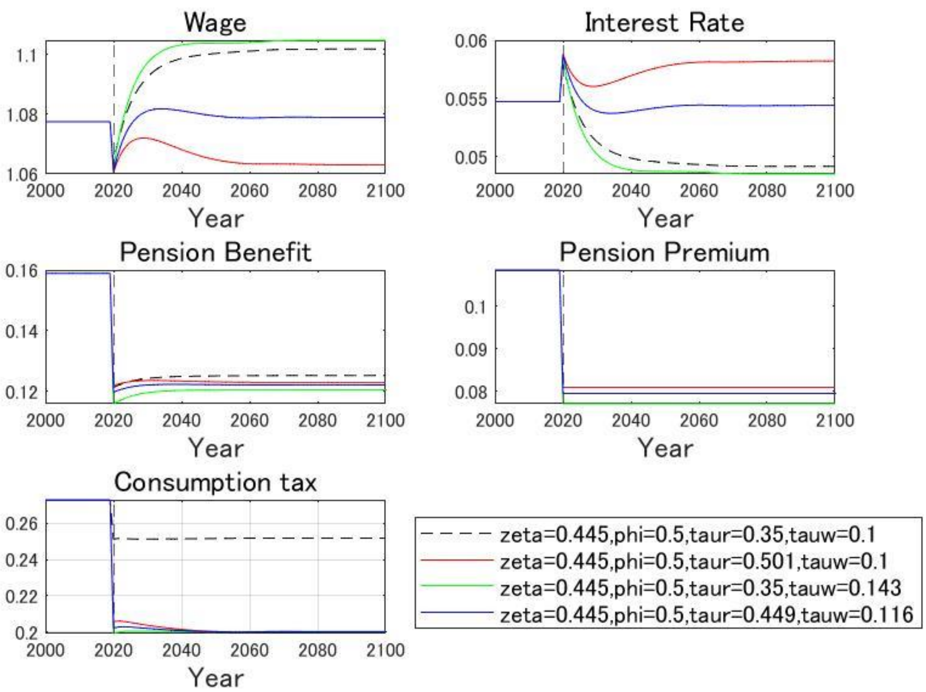
図表４－１３　総資本の推移（２－２－１～３の比較）



図表４－１４　総労働供給の推移（２－２－１～３）



図表４－１５　要素価格等の推移（２－２－１～３）

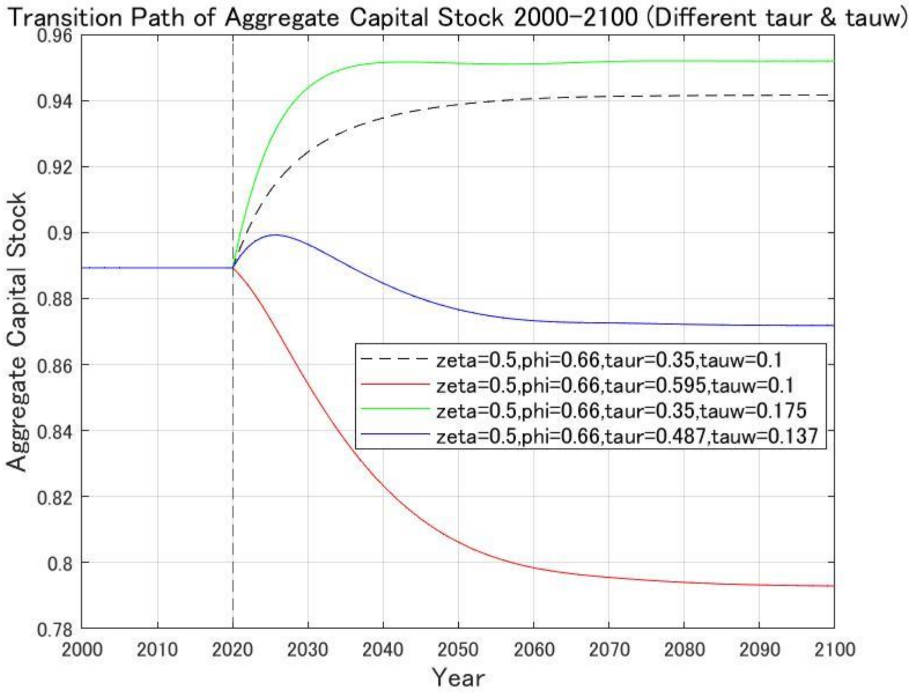


分析結果（シミュレーション３）

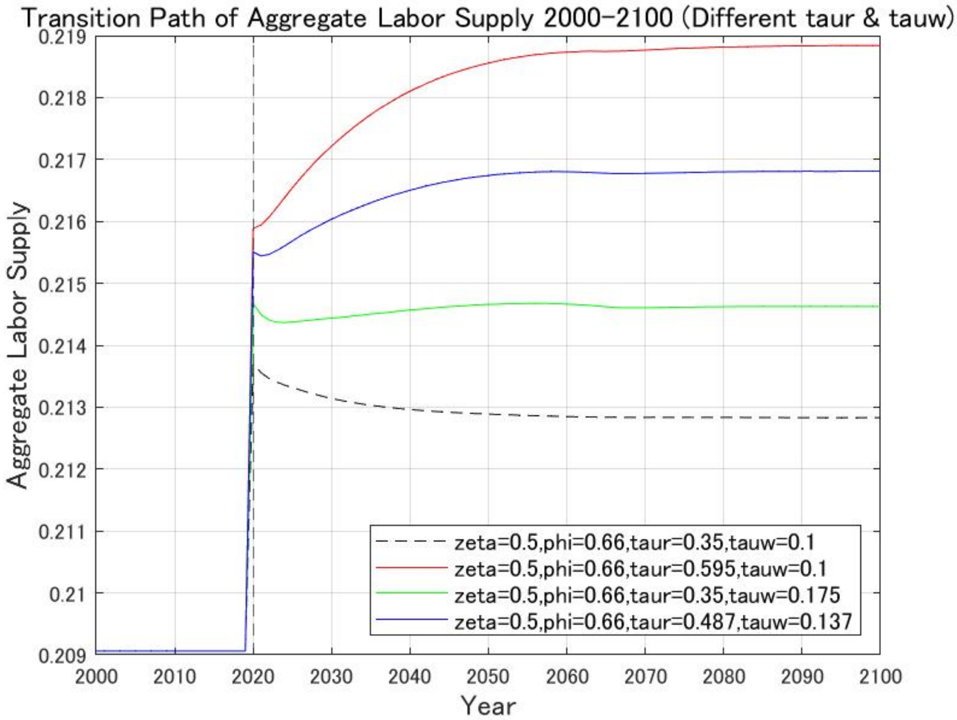
シミュレーション１では国庫負担率の上昇が消費税率の上昇をもたらすことを確認したが、政策選択の検討を多角的に行うため本シミュレーションでは国庫負担率を 0.66 とした場合において前シミュレーションと同様に均衡消費税率が 20%程度に収束するよう他の税率の調整を行った。その結果、資産所得税の増税のみにより消費税で負担すべき税収部分を一部賄う場合、必要な資産所得税率は政策変更後の所得代替率が 0.5 及び 0.445 のいずれの場合でも 58〜60%程度となった。同様の観点から労働所得税の増税を検討した場合、必要な労働所得税率は 17%程度となった。いずれの政策変更についても、シミュレーション２より高い税率が求められる結果となった。このように、本シミュレーションにおいて採用する資産・労働所得税率はシミュレーション２のものと異なるものであり、「国庫負担率以外の他の条件を一定として」国庫負担率の変化がもたらす効果を測定するという趣旨のものではない点には注意が必要である。その場合には内生変数である消費税率が 20%より高い水準で均衡することとなるだろう。本稿でのシミュレーションの意図はあくまで長期において消費税率を 20%前後とする場合に迫られる政策的選択を明らかにし、これらが経済に与える影響等を分析するというものである。

図表４－１６〜２１は各分析の結果をまとめたものである。資産所得税のみ増税、労働所得税のみ増税、及び両税とも増税という政策変更に関し、変更後の総資本及び総労働供給の両変数の高さと増税の組み合わせの関係性はシミュレーション２と同様である。総資本は労働所得税のみを増税する場合に最も高く、総労働供給は資産所得税のみを増税する場合に最も高い。また、前述したように端的にシミュレーション２の数値と比較することはできないが、一部政策変更の組み合わせについては国庫負担率の効果が顕著な形で表れている。例えば、図表４－１６及び４－１９の赤線はいずれも資産所得税のみ増税した場合の総資本の推移をプロットしたものであり、国庫負担率が 0.5 である場合（図表４－１０〜１３）と比べて総資本が低くなっているが、３－１－１ : $\xi = 0.5$, $\varphi = 0.66$, $\tau_r = 0.595$, $\tau_w = 0.1$ にいたっては政策変更後に総資本が増加することがない。このように、消費税率を一定程度に収束させるにあたり資産・労働所得税だけでなく国庫負担率も変更する場合においては、これを変更しない場合とは大きく異なる経済状況が実現する場合があることが分かった。

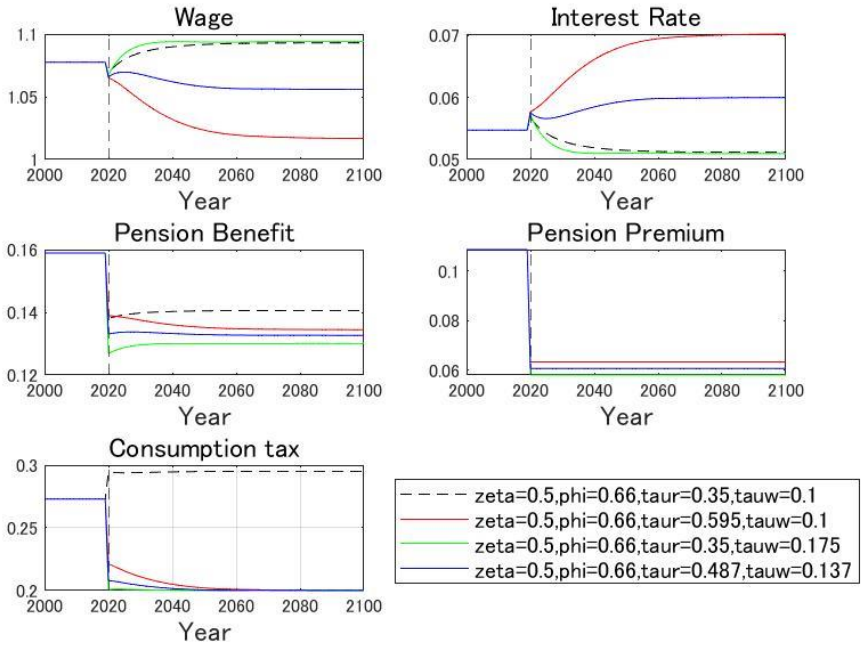
図表４－１６　総資本の推移（３－１－１～３の比較）



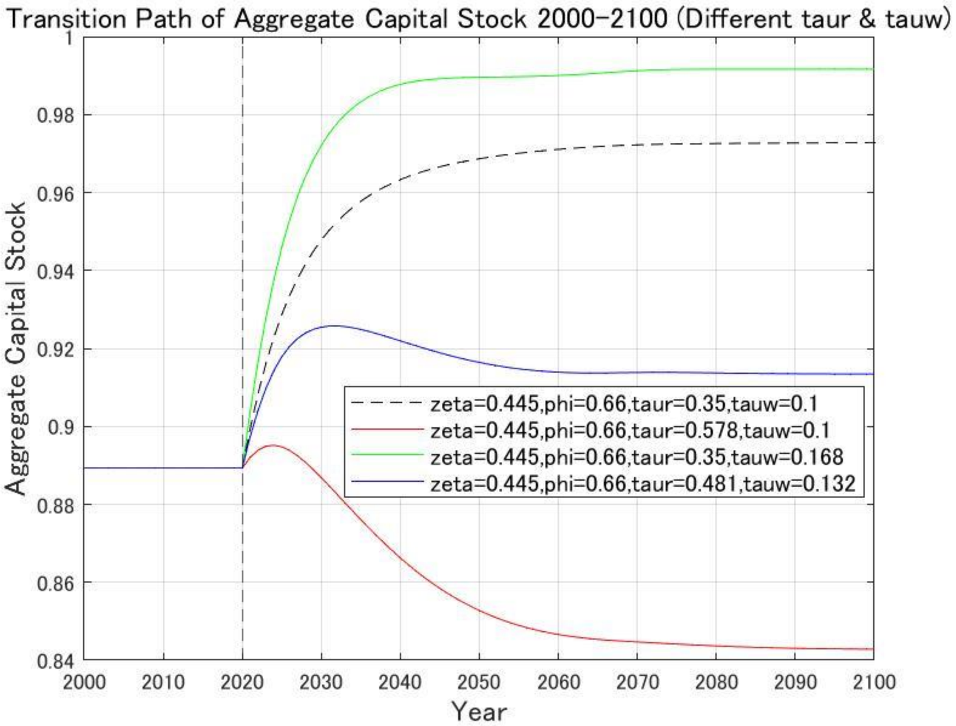
図表４－１７　総労働供給の推移（３－１－１～３の比較）



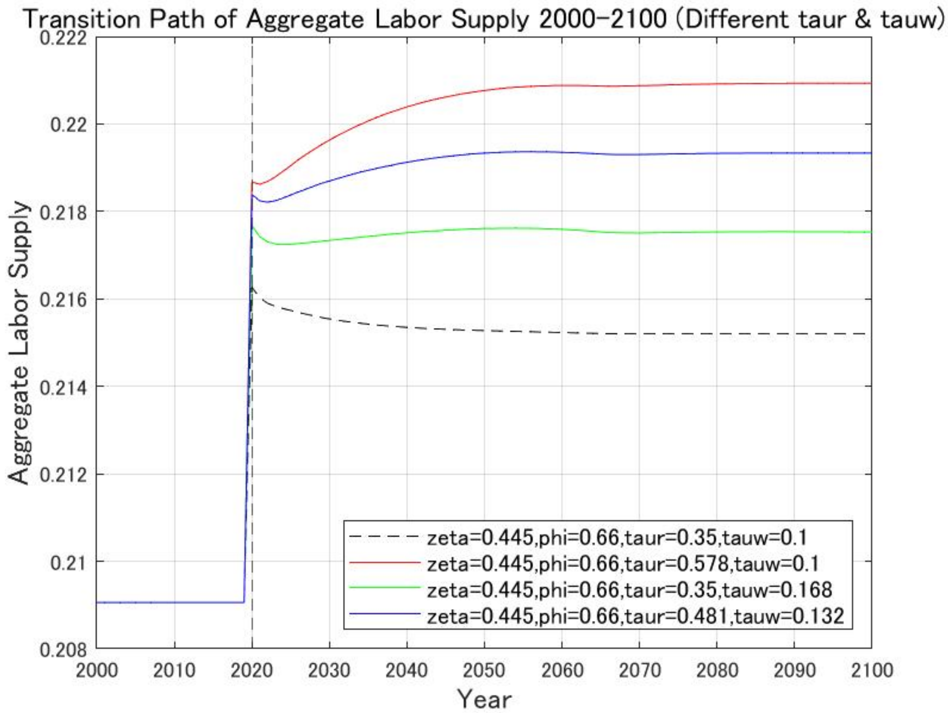
図表４－１８　要素価格等の推移（３－１－１～３の比較）



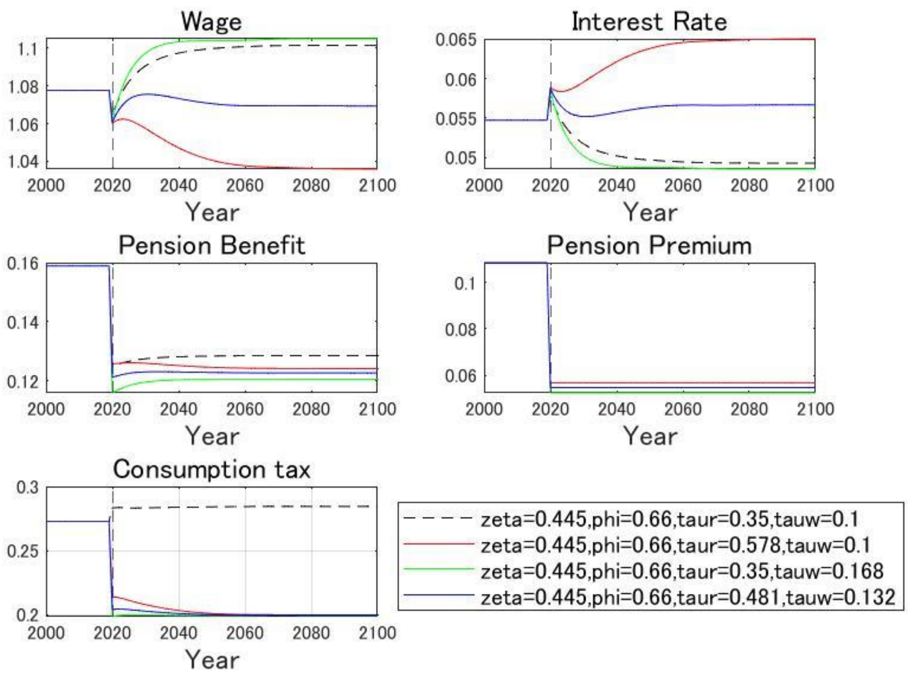
図表４－１９　総資本の推移（３－２－１～３の比較）



図表４－２０　総労働供給の推移（３－２－１～３の比較）



図表４－２１　要素価格等の推移（３－２－１～３の比較）



分析結果（シミュレーション４）

シミュレーション１～３の結果をもとに、本シミュレーションでは各世代の代表的家計の生涯効用の大きさを比較した。その趣旨は、旧定常状態と比べて各世代の個人の生涯効用が高ければ高いほど（旧定常状態よりも低い場合にはこれに近づけば近づくほど）このような政策を実施する際に国民の支持を得られやすく、したがって制度としての持続可能性が示唆されるのではないかという点である。最も、本稿において政策変更が行われるのは2020年においてであり、当該政策変更に支持・不支持を示すことができるのは当年に生存している（現役世代または引退世代となっている）個人に限られる。

本シミュレーションでは、ある年から経済活動に参入する個人の消費水準は旧定常状態でのみ経済活動を行った個人の消費水準の何%となるのか検討することにより、各世代の厚生比較を行った。その結果は以下の通りである。第一に、いずれのシミュレーションにおいても、生涯効用が最も低い（消費が旧定常状態と比べて最も小さい）のは1975年に経済活動に参入した世代である。この世代は政策変更前の最終年である2019年まで現役世代であり、政策変更が行われる2020年に引退世代となる世代である。当該世代の生涯効用が最も低くなるのは、労働供給に関する選択を行う期間が全て旧定常状態にあり、年金給付額等が推移する政策変更後の引退世代の予算制約を与件とした労働供給及び貯蓄の選択をすることができないためであると考える。図表４－２２（政策変更１－１の結果をプロットしたもの）にあるように、このような世代を起点として生涯効用の「谷」が形成されている。すなわち、当該世代より後に経済活動に参入する世代であれば、政策変更後の現役世代の期間が長ければ長いほど効用が高く（政策変更後の予算制約を織り込んだ労働供給の年齢別プロファイルを選択できる期間が長いため）、当該世代より前に誕生した世代（政策変更時点では既に引退世代となっている）であれば、政策変更前の引退世代の期間が長ければ長いほど効用が高くなる（年金給付額等が減少する以前に引退世代である期間が長いため）。他の図表からも明らかなように、このような谷の存在は程度の差はあれども他の政策的選択肢にも見られるものである。

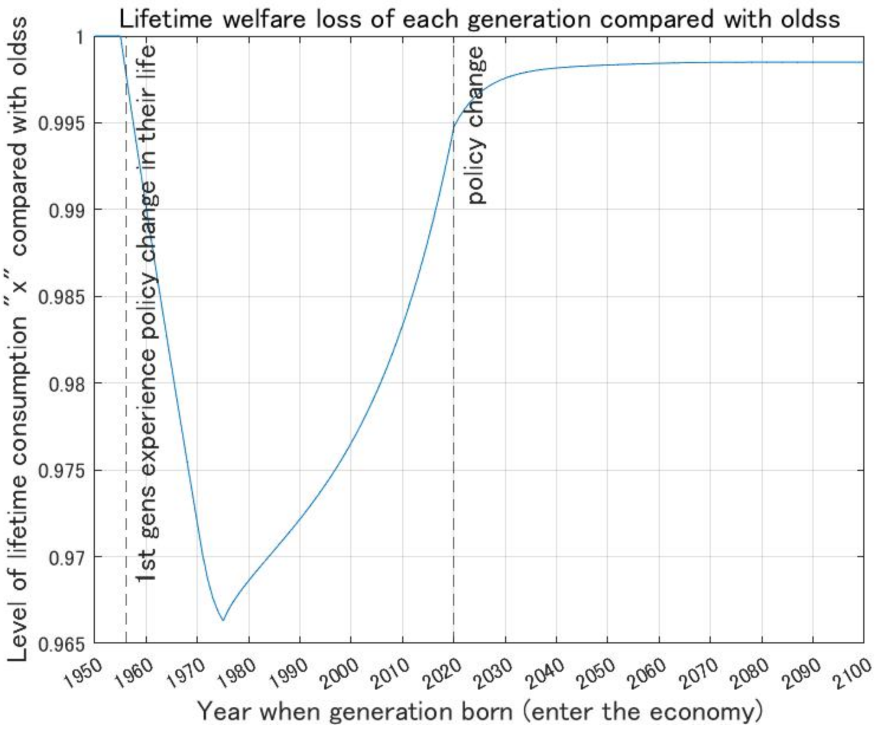
第二に、図表４－２３より消費税率の高さを無視してよいのであれば、家計の生涯効用（消費水準）が最も高くなるのは所得代替率を0.5とし、国庫負担率を0.66まで上昇させつつ、資産・労働所得税率については据え置きとした場合である。なお、図表４－９よりこの組み合わせのもとでは全シミュレーション中最も均衡消費税率が高くなることが分かる。政治的現実に鑑みれば消費増税のハードルは極めて高いが、一方で（少なくとも本稿での分析範囲においては）消費税率が高い状態であるほうが高い生涯効用を実現できるというのは興味深い結果である。

第三に、図表４－２４～２７より消費税率を 20%前後とするのであれば、基本的に資産所得税のみ増税を行う場合が最も家計の厚生が損なわれない状態であると言える。したがって、消費税率を一定の水準に留めることを意図するのであれば、労働所得税よりも資産所得税の増税を行う場合のほうが家計により多くの効用をもたらす（政策が家計の支持を集

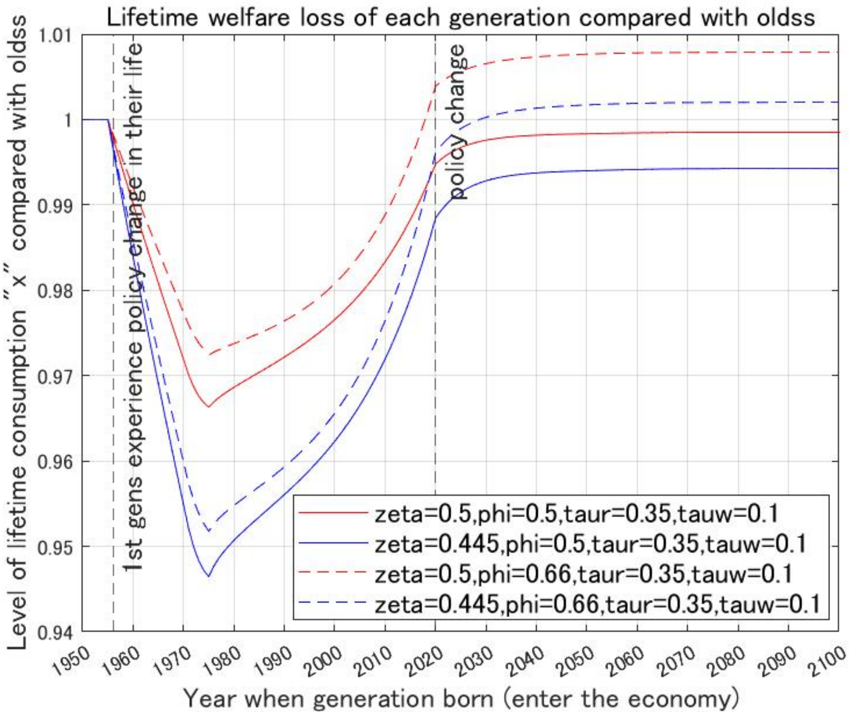
められやすい）ということになる。

第四に、図表４－２８にあるように資産所得税のみ増税を行うような政策変更中、最も「政策変更時点で生存する」各世代の個人の生涯効用が高いのは、所得代替率を 0.5 とし、国庫負担率を 0.66、資産所得税を 0.595 とする政策であるが、超長期において最も各世代の個人の生涯効用が高いのは所得代替率を 0.5 とし、国庫負担率を 0.5、資産所得税を 0.513 とする政策であった。したがって、政策変更時点に生存する世代にとってベストな選択肢はその後の個人にとっては必ずしも最善のものではないということが分かった。無論、ある年の一度きりの政策変更を永続させるというのは現実的ではないが、世代間衡平や将来世代への責任という意味においては興味深い分析結果となった。

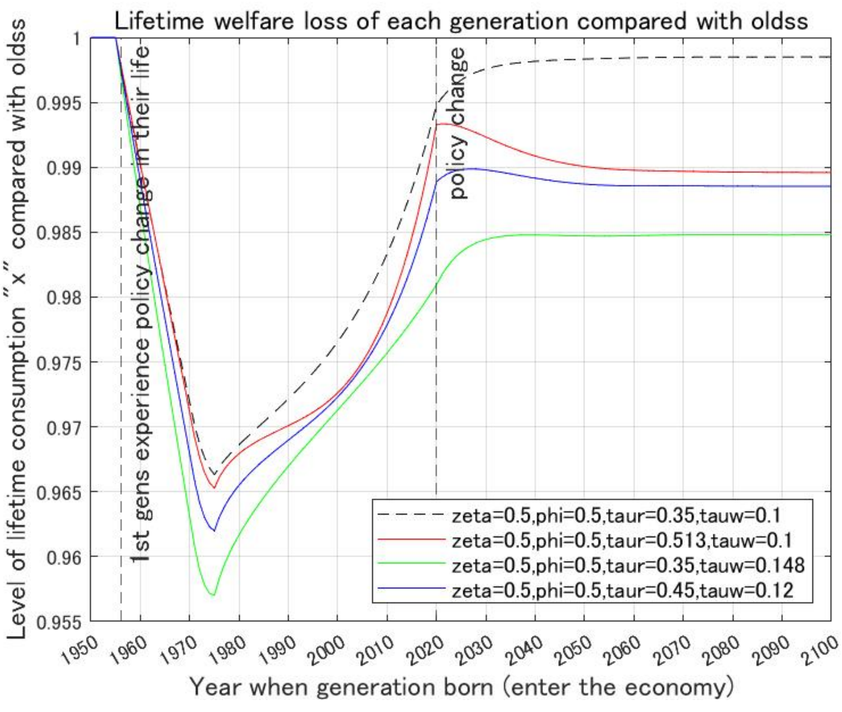
図表４－２２　厚生損失に関する世代間比較（１－１）



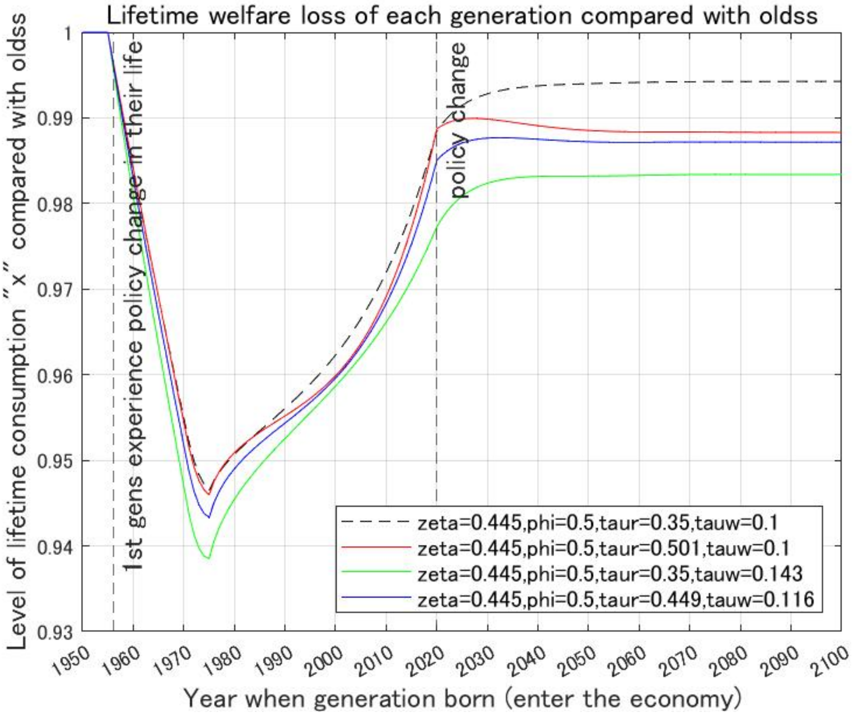
図表４－２３　厚生損失に関する世代間比較の比較（シミュレーション１）



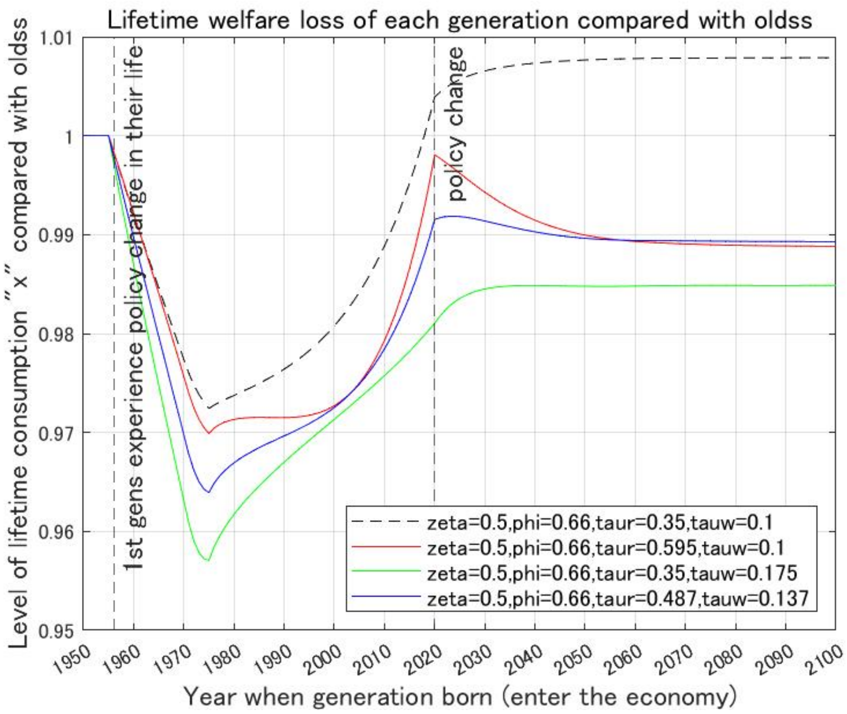
図表４－２４　厚生損失に関する世代間比較の比較（シミュレーション２－１－１～３）



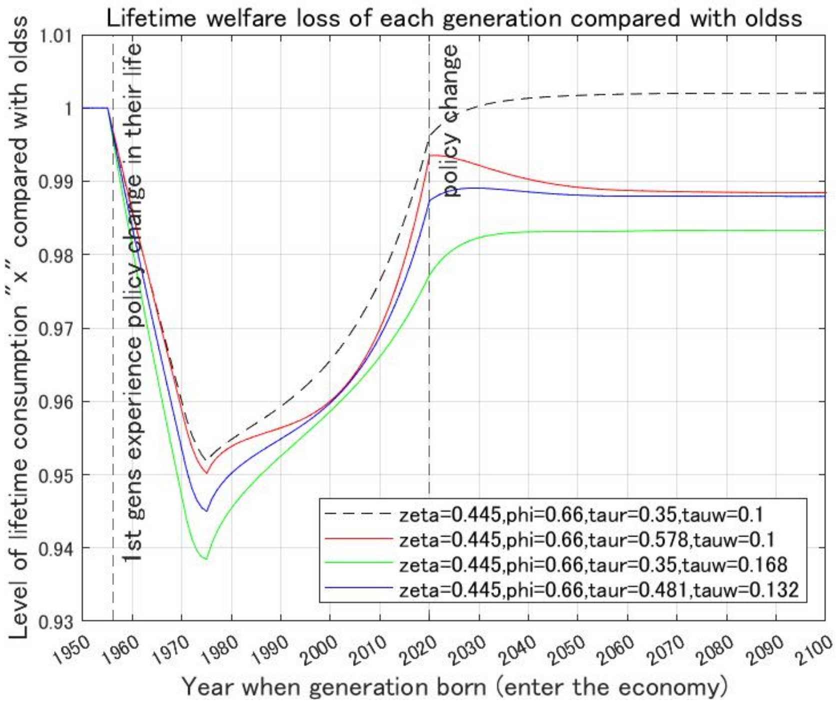
図表４－２５　厚生損失に関する世代間比較の比較（シミュレーション２－２－１～３）



図表４－２６　厚生損失に関する世代間比較の比較（シミュレーション３－１－１～３）

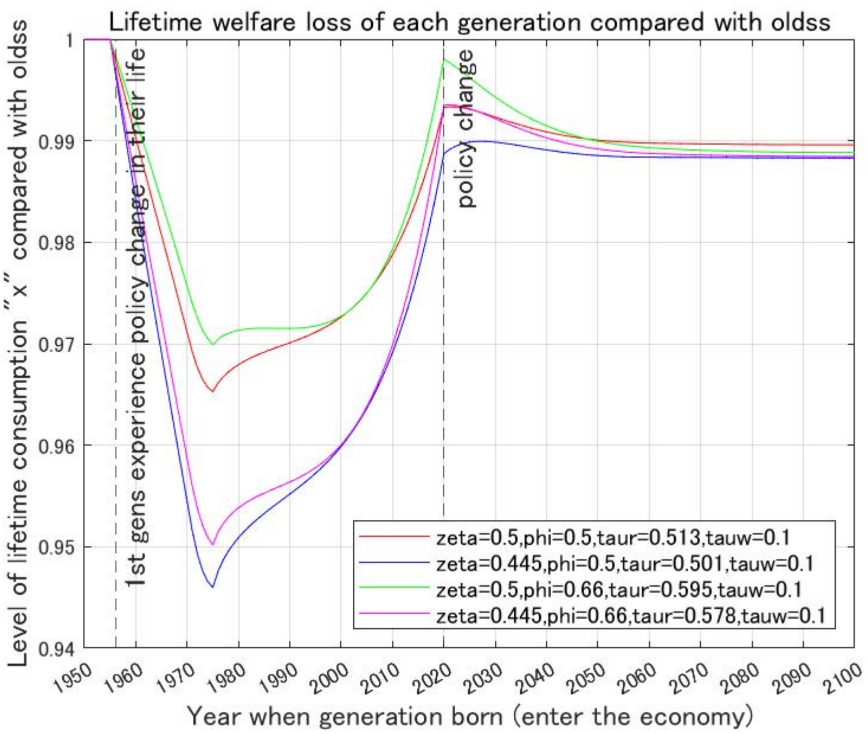


図表４－２７　厚生損失に関する世代間比較の比較（シミュレーション３－２－１～３）



図表４－２８　厚生損失に関する世代間比較の比較

（資産所得税のみを増税し、消費税率を 20%程度とする政策変更の比較）



５．まとめ

本稿ではわが国の年金制度の持続可能性を検討するとの目的のもと、世代重複モデルを用いて、所得代替率や国庫負担率、資産・労働所得税等の政策変更を行った場合の消費税率等への影響を分析し、個人の厚生比較を行った。シミュレーションの結果から示唆されるのは、消費税率が高いことが必ずしも個人の生涯効用を低める要因とはならない点、消費税率を 20%前後に抑えつつ年金財政を維持する場合には資産所得税のみ増税を行うほうが個人の生涯効用の観点からは望ましい点等である。昨今のわが国の財政状況を踏まえると、年金財源の確保の在り方を検討することは急務であるが、その際には個人の厚生にとって望ましい選択とは何か、関連して政治的に許容される制度とは何か検討するという視点が求められよう。

本稿では簡素なモデルの構築を試みた一方で、国庫負担率の概念を取り入れ、モデルの想定に近い経済（財政検証レポートのケースⅤ）をベンチマークとするなどの工夫を行った。しかしながら、毎年公債が発行され、財政赤字が発生し、人口構造に変化が起こっているのが現実であり、本稿のモデルを出発点としてより現実的なモデルを構築していくが求められよう。本稿では取り入れることが出来なかった経済成長率や人口分布の実績値の反映、毎年の個人の生存確率の概念等の反映の在り方については今後の課題としたい。

謝辞

本稿の執筆にあたっては、指導教官である楡井誠先生には大変お世話になりました。大学院の授業履修を通じて関心を持った経済学の分野についてリサーチペーパーを執筆できればと考えていたところ、授業で先生から独立財政機関で世代重複モデルが用いられているとのお話を頂いたことが本稿執筆のきっかけとなりました。同モデルの理解や MATLAB への反映に際しては多くの困難がありましたが、お忙しい中先生から多くのご指導・ご助言を頂くことでリサーチペーパーの完成に至ることができました。心より感謝申し上げます。本稿では実装できなかった人口分布や生存確率、年齢以外の個人の異質性等の導入の検討などを踏まえたモデルの構築とシミュレーションについては、今後も引き続き検討していきたいと思います。本当にありがとうございました。

参考文献

Hayashi, F. and Prescott, E.C (2002). The 1990s in Japan: A Lost Decade. *Review of Economic Dynamics,* 5(1), 206-235

Heer, B. and Maussner, A (2009). Dynamic general equilibrium modeling : computational methods and applications. *Springer.*

İmrohoroğlu, S., Kitao, S and Yamada, T (2016). Achieving Fiscal Balance in Japan. *International Economic Review,* 57(1), 117-154

Kitao, S., Mikoshiba, M. and Takeuchi, H (2019). Females, the Elderly, and Also Males: Demographic Aging and Macroeconomy in Japan. *RIETI Discussion Paper Series 19-E-039*

島澤諭（2004）「年金は誰が負担するべきか？― 一般均衡型世代重複モデルによる数値試算 ―」『ESRI Discussion Paper Series』 No.95.

山田潤司（2021）「多世代重複モデルを使った財政の維持可能性の検証」財務省財務総合政策研究所『フィナンシャル・レビュー』令和３年第１号（通巻第 144 号）61-72

Appendix

計算手法のまとめ（シミュレーション１～３関連）

本稿では計算ソフトウェアである MATLAB を用いて定常状態からの移行経路を分析したわけであるが、そのプロセスは数理的には下記の通り整理できる。なお、本稿のモデルは前述したとおり Heer＆Maussner（2009:451-501）を参考にし、その内容をわが国の制度的環境に合わせて修正したものであるため、計算手法の基本的な考え方は同著と同じである。また、本稿のモデルの作成にあたり多くの部分を修正したものの、本コードは筆者が”Quantitative Macroeconomics I ”を履修した際の授業内共有ページ内にある御子柴みなも氏の 2018 年作成のコードをもとにしたものである。

①旧定常状態から新定常状態への移行期間（tc）を設定する（本稿では 195 年)。

②新旧定常状態における K_{ss}，N_{ss}，$k_{ss}^{s=1,\dots T+TR}$，$n_{ss}^{s=1,\dots T}$等の内生変数の値を算出する。

（政策変更が$t=1$ に行われ、$t=tc$ までを移行経路として考えると、$t=0$ は旧定常状態にあり、$t=tc+1$ は新定常状態にあるものと仮定できる。計算の詳細は後述。）

③新旧定常状態間の経路における総資本及び総労働供給$\{K_t,N_t\}_{t=1}^{tc}$を予測する

（MATLAB 上では、新旧定常状態のそれぞれのK_{ss}，N_{ss} の値をもとに線形補間 (linear interpolation）を行うことで、tc 内のK_t,N_t の初期予測を行っている）

④移行経路を計算する

（上記総資本及び総労働供給の予測を用いて実質利子率や消費税等の変数を求め、さらにこれらの変数を用いて個人レベルの行動に関する変数（k_t^s，n_t^s,）を求める。この点、移行経路中のある一年における全世代の資本保有及び労働供給を積み上げることで、それぞれ新たな総資本及び総労働供給 $\{K_t^{new},N_t^{new}\}$ を得ることができるが、これについては④のプロセスを経ることで結果的に $t=1,\dots,tc$ の各年分の値を得ることができる。

※プロセスの計算手法は後述する②（イ）と似ているが、MATLAB のコード ”transition_RP.m”にもあるように、時間の概念を考慮に入れる必要がある。）

⑤$\{K_t^{new},N_t^{new}\}_{t=1}^{tc}$ が③で予測した数値と近ければ次のステップに進み、そうでなければ③での初期予測をアップデートし、これを用いて④のプロセスに戻る。

（MATLAB の計算上では、移行期間の全ての数値につきそれぞれ対応する初期予測の数値との比較を行い、差（gap）が最も大きいものを記録し、これが事前に設定した許容範囲（tolerance）を超えるものでないか比較する（つまり、gap<tolerance なら OK）という手法を用いる）

⑥$t=tc$ （すなわち移行期間の最後の年）の総資本及び総労働供給の数値が新定常状態（$t=tc+1$）のものと近ければ計算を終了し（MATLAB 上の手法は⑤と同様)、そうでなければ tc の数を増やして③のプロセスに戻る（linear interpolation から再び始める)。

・②における定常状態の計算手法について（添え字には t ではなく ss （steady state）を用いている）

プロセスを大きく分けると、（ア）定常状態の総資本及び総労働供給の初期予測を行う、（イ）個人の行動に関する変数の計算に必要な実質利子率、実質賃金、年金給付額、年金保険料率及び消費税率の計算する $\{r_{ss}, w_{ss}, p_{ss}, \tau_{p,ss}, \tau_{c,ss}\}$、（ウ）個人は誕生時に資本を保有しない（$k_{ss}^{1}=0$）との前提のもと、個人の消費、貯蓄及び労働供給についての最適経路を「後ろ向きに」解く（backward induction）、（エ）（ウ）により得られた数値を集積し、新たに総資本及び総労働供給を算出する、（オ）初期予測と新たに得られた数値が近くなる（MATLAB 上の手法は⑤と同様）まで、初期予測のアップデート⇒（イ）〜（オ）の計算というプロセスを繰り返すという５段階に整理できる。

計算の根底にあるのは、定常状態においてはある個人が生涯の各期において行う「通時的な」行動（例えば資本の保有）は、ある期に経済活動を行う全ての世代の個人の「共時的な」行動と等しくなるというものである。したがって、例えば個人の生涯の資本保有の経路を計算し、これを集積するという営為により、定常状態における総資本 K_{ss} を求めることができる。以下、上記プロセスのうち一部について詳述する。

（イ）$\{r_{ss}, w_{ss}, p_{ss}, \tau_{p,ss}, \tau_{c,ss}\}$ の計算には２つの一階の最大化条件（すなわち（６）及び（７）の等式）及び政府の予算制約式を用いる。まず、下記等式から実質利子率及び実質賃金を求める。

$$w_{ss}=(1-\alpha)K_{ss}^{\alpha}N_{ss}^{-\alpha}\ \cdots（６）$$

$$r_{ss}=\alpha K_{ss}^{\alpha-1}N_{ss}^{1-\alpha}-\delta\ \cdots（７）$$

次に、年金制度に関する等式（９）及び（10）から年金給付額及び年金保険料率を算出する。

$$\tau_{p,ss}w_{ss}N_{ss}=(1-\varphi)\frac{T^R}{T+T^R}p_{ss}\cdots（９）$$

$$\xi=\frac{p_{ss}}{(1-\tau_w-\tau_{p,ss})w_{ss}\bar{n}_{ss}}\Rightarrow p_{ss}=\xi\left(1-\tau_w-\tau_{p,ss}\right)w_{ss}\frac{T+T^R}{T}N_{ss}\cdots（10）$$

p_{ss} について整理した（10）を（９）に代入すると

$$\tau_{p,ss}w_{ss}N_{ss}=(1-\varphi)\frac{T^R}{T+T^R}\xi\left(1-\tau_w-\tau_{p,ss}\right)w_{ss}\frac{T+T^R}{T}N_{ss}$$

$$\Rightarrow\tau_{p,ss}=(1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi\left(1-\tau_w-\tau_{p,ss}\right)$$

$$\Rightarrow\tau_{p,ss}+(1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi\tau_{p,ss}=(1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi(1-\tau_w)$$

$$\Rightarrow\left(1+\left((1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi\right)\right)\tau_{p,ss}=(1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi(1-\tau_w)$$

$$\Rightarrow \tau_{p,ss} = \frac{(1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi(1-\tau_w)}{\left(1+\left((1-\varphi)\frac{T^R}{T}\xi\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \ \tau_{p,ss} = \frac{(1-\varphi)T^R\xi(1-\tau_w)}{T+(1-\varphi)T^R\xi}$$

したがって、$\tau_{p,ss}$ 及び（10）を用いて p_{ss} を計算することができる。

最後に、政府の一般会計の予算制約式（８）及び財市場の均衡式（13）から $\tau_{c,ss}$ を求める。今までの計算から、$\tau_{c,ss}$ 以外の変数は与件として考えることができる。

$$\tau_w w_{ss} N_{ss} + \tau_r r_{ss} K_{ss} + \tau_{c,ss} C_{ss} = \varphi \frac{T^R}{T+T^R} p_{ss} + G_{ss} \cdots \text{（８）}$$

$$\Rightarrow \tau_{c,ss} C_{ss} = \varphi \frac{T^R}{T+T^R} p_{ss} + G_{ss} - \tau_w w_{ss} N_{ss} - \tau_r r_{ss} K_{ss}$$

$$\Rightarrow \tau_{c,ss} = \frac{1}{C_{ss}}\left[\varphi \frac{T^R}{T+T^R} p_{ss} + G_{ss} - \tau_w w_{ss} N_{ss} - \tau_r r_{ss} K_{ss}\right]$$

（13）を変形することで $C_{ss} = (1-\bar{g})K_{ss}^{\alpha} N_{ss}^{1-\alpha} - \delta k_{ss}$ を得ることができ、また$G_{ss} = \bar{g} Y_{ss} = \bar{g} N_{ss}^{1-\alpha} K_{ss}^{\alpha}$ である。これらを上記式に代入すると、以下の通りになる。

$$\tau_{c,ss} = \frac{1}{(1-\bar{g})K_{ss}^{\alpha} N_{ss}^{1-\alpha} - \delta k_{ss}}\left[\varphi \frac{T^R}{T+T^R} p_{ss} + \bar{g} K_{ss}^{\alpha} N_{ss}^{1-\alpha} - \tau_w w_{ss} N_{ss} - \tau_r r_{ss} K_{ss}\right]$$

⇒（イ）の計算終了。

（ウ）（イ）で求めた要素価格等を与件（したがって定数として扱うことができる）とし、個人の効用最適化問題（ラグランジュの未定乗数法）を解く。個人の効用関数（２）及び予算制約式（３）より以下のとおり計算することができる。

$$u(c,l) = \frac{\left((c+\psi)l^{\gamma}\right)^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \ \cdots \text{（２）}$$

$$\left(1+\tau_{c,t}\right)c_t^s + k_{t+1}^{s+1} = (1+(1-\tau_r)r_t)k_t^s + \left(1-\tau_w-\tau_{p,t}\right)w_t n_t^s,\ \ s = 1,\ldots,45 \ \cdots \text{（３）}$$

$$\max_{c_{t+s-1},l_{t+s-1},k_{t+s}} \sum_{s=1}^{T+T^R} \beta^{s-1} u(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) + \lambda_s\Big((1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^s + \big(1-\tau_w - \tau_p\big) w n_{t+s-1}^s - (1+\tau_c)c_{t+s-1}^s - k_{t+s}^{s+1}\Big)$$

$l_t^s = 1 - n_t^s$ より

$$\max_{c_{t+s-1},l_{t+s-1},k_{t+s}} \sum_{s=1}^{T+T^R} \beta^{s-1} u(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) + \lambda_s\Big((1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^s + \big(1-\tau_w - \tau_p\big) w(1-l_{t+s-1}^s) - (1+\tau_c)c_{t+s-1}^s - k_{t+s}^{s+1}\Big)$$

$FOC(c_{t+s-1})$: $\beta^{s-1}u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) - \lambda_s(1+\tau_c) = 0$ …①

$FOC(l_{t+s-1})$: $\beta^{s-1}u_l(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) + \lambda_s\left((1-\tau_w-\tau_p)w(-1)\right) = 0$ …②

$FOC(k_{t+s})$: $-\lambda_s + \lambda_{s+1}(1+(1-\tau_r)r) = 0$ …③

（なお、引退世代についても同じ FOC が考えられる（余暇について偏微分することは変わらず、年金給付は計算の過程で取り除かれるため））

②/①により

$$\frac{u_l(c_t^s, l_t^s)}{u_c(c_t^s, l_t^s)} = \frac{1}{(1+\tau_c)}(1-\tau_w-\tau_p)w$$

左辺を整理すると $\frac{u_l(c_t^s, l_t^s)}{u_c(c_t^s, l_t^s)} = \gamma\frac{c_t^s+\psi}{l_t^s}$

よって

$\gamma\frac{c_{t+s-1}^s+\psi}{l^s{}_{t+s-1}} = \frac{1}{(1+\tau_c)}(1-\tau_w-\tau_p)w$ …④（Intra-temporal choice）

さらに、①及び③より

$\beta^{s-1}u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) = \lambda_s(1+\tau_c)$ （①より）

$\lambda_s = \lambda_{s+1}(1+(1-\tau_r)r)$（③より）

$\Rightarrow \beta^{s-1}u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) = \lambda_{s+1}(1+(1-\tau_r)r)(1+\tau_c)$

①より、 $\lambda_s = \beta^{s-1}u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s)\frac{1}{(1+\tau_c)}$, が成り立つため、

$$\beta^{s-1}u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) = \beta^s u_c(c_{t+s}^{s+1}, l_{t+s}^{s+1})(1+(1-\tau_r)r)\frac{(1+\tau_c)}{(1+\tau_c)}$$

$$\Rightarrow \beta^{s-1}u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s) = \beta^s u_c(c_{t+s}^{s+1}, l_{t+s}^{s+1})(1+(1-\tau_r)r)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{u_c(c_{t+s-1}^{s+1}, l_{t+s-1}^{s+1})}{u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s)}(1+(1-\tau_r)r)$$

偏微分の部分を整理すると、 $\frac{u_c(c_{t+s-1}^{s+1}, l_{t+s-1}^{s+1})}{u_c(c_{t+s-1}^s, l_{t+s-1}^s)} = \frac{(c_{t+s}^{s+1}+\psi)^{-\eta}(l_{t+s}^{s+1})^{\gamma(1-\eta)}}{(c_{t+s-1}^s+\psi)^{-\eta}(l_{t+s-1}^s)^{\gamma(1-\eta)}}$

よって

$\frac{1}{\beta} = \frac{(c_{t+s}^{s+1}+\psi)^{-\eta}(l_{t+s}^{s+1})^{\gamma(1-\eta)}}{(c_{t+s-1}^s+\psi)^{-\eta}(l_{t+s-1}^s)^{\gamma(1-\eta)}}(1+(1-\tau_r)r)$ …⑤（Inter-temporal choice）

（以上より、最適化の等式を得ることができた）

これより、定常状態の aggregate variables を求める。予算制約式を消費についての形に整理すると…

（現役世代）

$$c_{t+s-1}^{s}=\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+\left(1-\tau_w-\tau_p\right)wn_{t+s-1}^{s}-k_{t+s}^{s+1}\right]$$

（引退世代）

$$c_{t+s-1}^{s}=\frac{1}{(1+\tau_c)}[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+p-k_{t+s}^{s+1}]$$

上記式を④及び⑤にそれぞれ代入すると…

（for $s=1,\ldots,T-1$）

$$\frac{1}{(1+\tau_c)}\left(1-\tau_w-\tau_p\right)w=\gamma\frac{\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+\left(1-\tau_w-\tau_p\right)wn_{t+s-1}^{s}-k_{t+s}^{s+1}\right]+\psi}{1-n_{t+s-1}^{s}}$$

$\Rightarrow$

$$\left(1-\tau_w-\tau_p\right)w=\gamma\frac{\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+\left(1-\tau_w-\tau_p\right)wn_{t+s-1}^{s}-k_{t+s}^{s+1}\right]+\psi}{1-n_{t+s-1}^{s}}(1+\tau_c)\quad\cdots⑥$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\left[\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s}^{s+1}+\left(1-\tau_w-\tau_p\right)wn_{t+s}^{s+1}-k_{t+s+1}^{s+2}\right]+\psi\right]^{-\eta}}{\left[\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+\left(1-\tau_w-\tau_p\right)wn_{t+s-1}^{s}-k_{t+s}^{s+1}\right]+\psi\right]^{-\eta}}\times\frac{\left(1-n_{t+s}^{s+1}\right)^{\gamma(1-\eta)}}{\left(1-n_{t+s-1}^{s}\right)^{\gamma(1-\eta)}}\times(1+(1-\tau_r)r)\quad\cdots⑦$$

（for $s=T$）

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\left[\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s}^{s}+p-k_{t+s+1}^{s+2}\right]+\psi\right]^{-\eta}}{\left[\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+\left(1-\tau_w-\tau_p\right)wn_{t+s-1}^{s}-k_{t+s}^{s+1}\right]+\psi\right]^{-\eta}}\times\frac{1}{\left(1-n_{t+s-1}^{s}\right)^{\gamma(1-\eta)}}\times(1+(1-\tau_r)r)\quad\cdots⑧$$

（for $s=T+1,\ldots,T+T^{R}$）

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\left[\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s}^{s}+p-k_{t+s+1}^{s+2}\right]+\psi\right]^{-\eta}}{\left[\frac{1}{(1+\tau_c)}\left[(1+(1-\tau_r)r)k_{t+s-1}^{s}+p-k_{t+s}^{s+1}\right]+\psi\right]^{-\eta}}(1+(1-\tau_r)r)\quad\cdots⑨$$

（$k^{1}=k^{66}=0$ である）

以上より、$64+45=109$ の未知数（$\{k\}_{s=2}^{65}$ and $\{n\}_{s=1}^{45}$）及びそれと同数の方程式（現役世代については $45\times2=90$ 本、引退世代については労働を行わないため Intra-temporal choice が発生せず（⑥より数学的にも 0 となる）、かつ最後の期は Inter-temporal choice も存在しないため 19 本となる。計 109 本）を得ることができた。しがたって、それぞれの未知数は数理的に計算可能である。k^{65} を予測し、これをもとに $k^{64},\ldots,k^{1}$ を計算し、最終的に k^{1} の値が 0 に近ければ計算を終了するとう手法により各年齢の最適資本保有量及び労働供給量が計算される。

計算手法のまとめ（シミュレーション４関連）

計算において用いたコードは”compute_welfare_RP.m”である。計算手法の詳細は以下の通りである。

①旧定常状態の年齢別の効用、消費及び余暇のベクトル（列ベクトル）を作成する。

②主観的割引率 β と効用についての列ベクトルを用いて旧定常状態の個人の生涯効用を算出する。

③既にシミュレーション１～３において得られたワークスペース中にある移行期の総資本及び総労働供給を表すベクトル（行ベクトル）を用いて①②のプロセスと同様に各世代の代表的家計の個人の生涯効用を計算する（効用、消費及び余暇の列ベクトルも求める）。

④バイセクション法により旧定常状態の個人の生涯効用が移行期に生存する個人の生涯効用と等しくなるような消費水準 x を求める。

例えば、初期における未知数 x の上限を 1.5、下限を 0.5 とすると、その平均は 1 である。これを $mean\,x$ と定義し、これに旧定常状態の消費に関する列ベクトルを掛け合わせることで、（初期値は 1 であるものの）未知数 x を織り込んだ旧定常状態の個人の生涯効用を算出することができる（効用は、消費と余暇の関数である）。このようにして得られた旧定常状態の個人の生涯効用の値から移行期のある期に生まれた（経済活動に参入した）個人の生涯効用の値を差し引いた場合の数値（ΔU）を求め、それが十分に小さくなるまで未知数 x のアップデート（”while loop”）を繰り返す（十分に小さくなるような未知数 x を求める）というのが基本的作法である。

この点、横軸を未知数 x 、縦軸を効用の差 ΔU とするグラフを考えると、基本的には右肩上がりの単調な線を想像することが出来る（本稿のモデルの効用関数の性質上、消費が大きいほど効用が高まるのであり、したがって未知数が大きければこれを織り込んだ生涯効用も大きくなるはずである）。したがって、アップデートにおける次ループの $mean\,x$ を算出する上では、当ループの計算から得られた ΔU の値が負である場合には未知数 x の下限を、正である場合には未知数 x の上限を「当ループにおける」 $mean\,x$ と同値にし、上限と下限の平均を計算して新たに $mean\,x$ を定義することとなる。このプロセスを繰り返すことで、ΔU が十分に 0 に近いような $mean\,x$ を最終的に求めることができる。

このようなループを各世代行うことで、一政策変更が各世代の生涯効用にもたらす影響を消費水準の観点から計算することができる。